Verzeichnis der Bände der „Sammlung Schubert“.

(Voraussichtlicher Erscheinungstermin in Klammer.)

Die Preise betragen für das gebund. Exempl. ca. M. 2.50 bis M. 5.00.

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra.** Von Prof. Dr. H. Schubert in Hamburg. (Erschienen.)

„ II: **Elementare Planimetrie.** Von Prof. W. Pflieger in Münster. (Mai 1900.)

„ III: **Ebene und sphärische Trigonometrie.** Von Dr. F. Bohnert in Hamburg. (Erschienen.)

„ IV: **Elementare Stereometrie.** Von Dr. F. Bohnert in Hamburg. (Mai 1901.)

„ V: **Niedere Analysis.** Von Prof. Dr. H. Schubert in Hamburg. (Oktober 1900.)

„ VI: **Algebra, Determinanten und elementare Zahlentheorie.** Von Dr. O. Pund in Altona. (Erschienen.)

„ VII: **Ebene Geometrie der Lage.** Von Dr. R. Böger in Hamburg. (Erschienen.)

„ VIII: **Analytische Geometrie der Ebene.** Von Prof. Dr. M. Simon in Strafsburg. (Erschienen.)

„ IX: **Analytische Geometrie des Raumes.** Von Prof. Dr. M. Simon in Strafsburg. (Oktbr. 1900.)

„ X: **Differentialrechnung.** Von Prof. Dr. F. Meyer in Königsberg. (Oktober 1900.)

„ XI: **Integralrechnung.** Von Prof. Dr. F. Meyer in Königsberg. (Oktober 1900.)

Band XII: **Elemente der darstellenden Geometrie.** Von Dr. J. Schröder in Hamburg. (Mai 1900.)

„ XIII: **Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. (Mai 1900.)

„ XIV: **Praxis der Gleichungen.** Von Prof. C. Runge in Hannover. (Oktober 1900.)

„ XV: **Elemente der Astronomie.** Von Dr. E. Hartwig in Bamberg. (Mai 1900.)

„ XVI: **Mathematische Geographie.** Von Dr. E. Hartwig in Bamberg. (Mai 1900.)

„ XVII: **Anwendungen der darstellenden Geometrie.** Von Dr. J. Schröder in Hamburg. (Oktober 1900.)

„ XVIII: **Geschichte der Mathematik.** Von Prof. Dr. R. Haussner in Giessen. (Oktober 1900.)

„ XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung.** Von Dr. N. Herz in Heidelberg. (Oktober 1900.)

„ XX: **Versicherungsmathematik.** Von Dr. F. Paul in Budapest. (Mai 1900.)

Die Sammlung wird fortgesetzt.

Sammlung Schubert VII

Ebene
Geometrie der Lage

von

Dr. Rudolf Böger
Professor am Realgymnasium des Johanneums in Hamburg

Mit 142 Figuren

Leipzig
G. J. Göschensche Verlagshandlung
1900

Vorwort.

Der vorliegende Leitfaden folgt im allgemeinen der durch v. **Staudt** geschaffenen, durch Herrn **Reye** erschlossenen Darstellungsweise[(1)] der Geometrie der Lage. Im einzelnen finden sich mancherlei Abweichungen. Die wichtigsten unter diesen sind die beiden folgenden.

In der Definition[(30_1)] der projektiven Verwandtschaft bin ich nicht v. Staudt, sondern Herrn **Thomae** gefolgt. Ausschlaggebend war dabei für mich, dafs, von der Begründug der kollinearen und reziproken Verwandtschaft abgesehen, bei allen Konstruktionen und Beweisen die projektiven Gebilde aufgefafst werden als die Endglieder einer Kette von perspektiven Gebilden und dafs es daher für den Lernenden eine Erleichterung ist, wenn ihm in der Definition gerade diese Eigenschaft übermittelt wird.

Die Staudtsche Theorie der imaginären Elemente, die sich auf einen „ordentlichen" Wurf stützt, habe ich ersetzt durch eine Theorie, die von einem *beliebigen* Wurfe ausgeht. Diese Theorie macht eine Unterscheidung zwischen reellen und imaginären Fällen unnötig, weil sie nur Beweise kennt, die für alle Fälle gleichzeitig gelten. Hält man nämlich stets die durch einen Wurf bestimmte Involution fest und stützt die Beweise auf sie und niemals auf ihre etwa vorhandenen Ordnungselemente oder darauf, dafs keine Ordnungselemente vorhanden sind, so stellt sich nirgendwo das Bedürfnis ein, imaginäre Elemente einzuführen[(93 A; 133 A; 190 A;)]. Das Wort imaginär ist aber nicht blofs unnötig, es ist geradezu schädlich; denn es kann, weil ihm keine Vorstellung entspricht, nur verwirrend wirken. Das Wort imaginär sollte daher aus der Geometrie der Lage verbannt werden[(231)]. —

Dafs man durch die angegebene Verallgemeinerung (die ich zuerst in einer Abhandlung *Über Büschel und Netze von ebenen Polarsystemen zweiter Ordnung, Hamburg 1886*, veröffentlicht habe; vgl. die Arbeit des Herrn H. Wiener(158 A)) zu allgemein gültigen Konstruktionen und mit ihnen zu allgemein gültigen Beweisen gelangt, zeigt, neben den Lehrsätzen von Desargues(194₃) und Hesse(217) in ihrer allgemeinsten Form, die Aufgabe(203): Eine Kurve aus fünf (reellen oder imaginären) Punkten zu zeichnen. — Diese Aufgabe liefs sich allmählich soweit vereinfachen und elementar begründen, dafs sie gleich an die Lehre von den konjugierten Involutionen angeschlossen(100) und so in den Mittelpunkt des Ganzen gerückt werden konnte. Im Grunde führen alle Konstruktionen auf sie hin oder gehen von ihr aus.

In der Darstellung habe ich ein lückenloses Fortschreiten im Beweisen erstrebt. Durch ein ununterbrochenes Zurückverweisen auf die beim Schliefsen benutzten Lehrsätze soll der Lernende in den Stand gesetzt werden, mit möglichst geringer Mühe die Wurzeln jedes Beweises aufzudecken und sich über die Stellung jedes Satzes innerhalb des gesamten Lehrgebäudes Klarheit zu verschaffen. Überhaupt ist für die Form der Darstellung an jeder Stelle des Buches das Ziel gewesen, dem Lernenden den Zugang zur Geometrie der Lage zu erleichtern.

Hamburg, im November 1899.

Rudolf Böger.

Inhalt.

I. Der Kegelschnitt.

Erster Teil.

Der Kegelschnitt.

§ 1. Perspektive Verwandtschaft.

1. **Geometrie der Lage.** Die Geometrie der Lage beschäftigt sich ausschliefslich mit den Lagenbeziehungen geometrischer Gebilde zu einander; der Begriff des Mafses ist ihr fremd. Für die Zeichnung der Figuren dieses Buches reicht daher (von einzelnen Zusätzen abgesehen) das Lineal aus. Dem Lernenden wird dringend geraten, jede Figur nach den Angaben des Textes (wenn auch nur aus freier Hand mit Bleifeder) selbständig zu zeichnen; er wird bald finden, dafs er durch selbständiges Zeichnen das Verstehen des Inhalts erheblich beschleunigt. Die beigegebenen Figuren sollen nur zur Kontrolle und zum schnellern Verständnis beim Nachschlagen eines bereits durchgearbeiteten Lehrsatzes dienen. 1

Während in der Geometrie der Alten die Arithmetik in ausgedehntem Mafse zum Beweisen herangezogen wird, verzichtet die Geometrie der Lage auf jede Rechnung. Trotzdem werden auch heute noch die grundlegenden Sätze vielfach mit planimetrischen Hülfsmitteln bewiesen[41]; der vorliegende Leitfaden folgt der Darstellung des grofsen Geometers von Staudt, der die Geometrie der Lage zu einer selbständigen Wissenschaft machte, indem er ihr 1847 in seinem Buche *Geometrie der Lage*, dem von 1856 bis 1860 die *Beiträge zur Geometrie der Lage* folgten, eine Grundlage aus rein geometrischem Stoff gab. Weil aber durch Übung und Unterricht Gleichheit und Parallelität wichtige Hülfsmittel für unser Anschauungsvermögen geworden sind, so wird im folgenden (in durch ein Sternchen * kenntlich gemachten Nummern) die Vorstellung der geometrischen Figuren durch den Hinweis auf planimetrische Folgerungen aus den allgemeinen Lehrsätzen der Geometrie der Lage erleichtert; zu einem Fortschritt in der Beweisführung aber werden die Begriffe der Gleichheit und Parallelität nicht benutzt.

2 2. **Die geraden Grundgebilde: Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel.** Der Inbegriff der Punkte, die in einer Gerade liegen, heifst (gerade) *Punktreihe;* der Inbegriff der Geraden, die durch einen Punkt gehen, heifst (gerader) *Strahlenbüschel;* der Inbegriff der Ebenen, die durch eine Gerade gehen, heifst (gerader) *Ebenenbüschel.* Für Punktreihe, Strahlenbüschel und Ebenenbüschel hat man den gemeinsamen Namen *einförmige gerade Grundgebilde* oder Grundgebilde der ersten Stufe. Die Punkte (einer Punktreihe), die Strahlen (eines Strahlenbüschels), die Ebenen (eines Ebenenbüschels) nennt man die *Elemente* (des einförmigen Grundgebildes). Die Gesamtheit der Punkte $A\,B\,C\ldots$, die in der Gerade (oder, wie man auch sagt, in dem *Träger*) s liegen, bezeichnet man kurz als die Punktreihe s; die Gesamtheit der Strahlen $a\,b\,c\ldots$, die durch den Punkt (oder, wie man auch sagt, durch den *Mittelpunkt*) S gehen, als den Strahlenbüschel S; die Gesamtheit der Ebenen $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$, die durch die Gerade (oder, wie man auch sagt, durch die *Achse*) g gehen, als den Ebenenbüschel g.

3 3. **Uneigentliche Punkte und die uneigentliche Gerade.** Eine Gerade hat mehr Punkte, als wir zählen können; sie hat unzählig oder unendlich viele Punkte. Ebenso hat ein Strahlenbüschel unendlich viele Strahlen (und ein Ebenenbüschel unendlich viele Ebenen). Verbinden wir sämtliche Punkte einer Gerade s mit einem aufserhalb der Gerade liegenden Punkte S, so erhalten wir sämtliche Strahlen von S bis auf einen u, der der Gerade s parallel ist. Die Zahl der Strahlen eines Punktes ist mithin um eins gröfser als die Zahl der Punkte einer Gerade. Wir dürfen also nicht sagen: Jeder Strahl des Büschels S schneidet die Gerade s, sondern müssen hinzufügen: bis auf einen u, der der Gerade parallel ist. Dieser Strahl u nimmt aber, wie

wir im folgenden sehen werden, keine Ausnahmestellung ein; wir wollen deswegen den lästigen Zusatz umgehen, indem wir der Gerade s noch einen Punkt, den wir zum Unterschied von den übrigen den *uneigentlichen* nennen wollen, beilegen. Da dieser uneigentliche Punkt, in dem nach unserer neuen Ausdrucksweise der parallele Strahl die Gerade s schneidet, von jedem eigentlichen Punkt der Gerade unendlich weit entfernt ist, so nennen wir ihn auch den *unendlich fernen Punkt* der Gerade.

Der Grundsatz: Durch einen (eigentlichen) Punkt kann man zu einer Gerade eine und nur eine Parallele ziehen, lautet jetzt: Jede Gerade, die durch einen eigentlichen Punkt geht, hat einen und nur einen uneigentlichen (unendlich fernen) Punkt.

Aus diesem Grundsatz folgt, dafs alle uneigentlichen (unendlich fernen) Punkte der Ebene in einer Gerade, der *uneigentlichen (unendlich fernen) Gerade* o der Ebene, liegen. Denn lägen sie in einer andern Linie, so könnten wir zwei Punkte dieser Linie verbinden und somit eine Gerade mit zwei uneigentlichen Punkten zeichnen.

In Zukunft sprechen wir also nicht mehr von parallelen Geraden, sondern von solchen, die durch denselben Punkt der uneigentlichen Gerade o gehen oder, was dasselbe sagt, die sich in einem uneigentlichen Punkte schneiden.

4. **Drehungssinn.** Ein Strahl a kann sich 4
um einen seiner Punkte S in zweierlei Sinn drehen (mit dem Zeiger einer Uhr oder gegen den Zeiger einer Uhr). Ist b ein zweiter Strahl von S, so gelangt der Strahl a sowohl bei der Drehung im Sinn eines Uhrzeigers als auch bei der Drehung im entgegengesetzten Sinn nach b (Fig. 1).

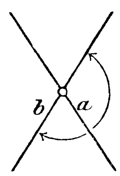

Fig. 1.

Ist c ein dritter Strahl von S, so überschreitet a bei der Drehung in dem einen Sinn, bevor er nach b gelangt, den Strahl c; bei der entgegengesetzten Drehung nicht. Wir wollen nun unter $a\,b\,c$ immer den Drehungssinn verstehen, bei welchem a, *ohne* c zu über-

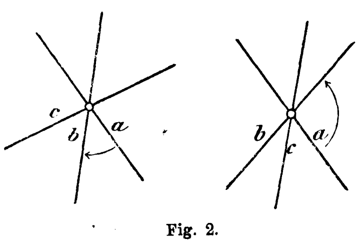

Fig. 2.

schreiten, nach b gelangt (Fig. 2), so dafs durch die Bezeichnung $a\,b\,c$ immer ein bestimmter Drehungssinn festgelegt ist.

5 5. **Bewegungssinn.** Von dem Punkt A einer Gerade s kann man sich in zweierlei Sinn fortbewegen, um zu einem zweiten Punkt B in s zu gelangen. Bewegt man sich in dem einen Sinn, so mufs man den uneigentlichen[3] Punkt von s überschreiten, um nach B zu gelangen; bewegt man sich in dem andern Sinn, so überschreitet man den uneigentlichen Punkt von s nicht (Fig. 3). Den Sinn beider Bewegungen wollen wir dadurch unterscheiden, dafs wir die Bewegung, bei welcher der uneigentliche Punkt *nicht* überschritten wird, durch $A\,B$, und die Bewegung, bei welcher der uneigentliche Punkt überschritten wird, durch $A \cdot B$ bezeichnen.

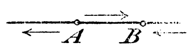

Fig. 3.

Ist C ein dritter (eigentlicher) Punkt von s, so wollen wir unter $A\,B\,C$ immer den Bewegungssinn verstehen, bei

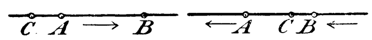

Fig. 4.

welchem man von A nach B gelangt, *ohne* C zu überschreiten, so dafs durch die Bezeichnung $A\,B\,C$ immer ein bestimmter Bewegungssinn festgelegt ist (Fig. 4).

6 6. **Perspektive Lage.** *Das Wesen der Geometrie der Lage besteht darin, die Elemente der Grundgebilde*[2] *einander zuzuordnen,* d. h. jedem Element des einen Grundgebildes ein Element des andern zuzuweisen.

Zwei einander zugeordnete Elemente heifsen *homologe* Elemente.

Auf die einfachste Art stellt man eine solche Zuordnung, z. B. zwischen einer Punktreihe s und einem Strahlenbüschel S, in folgender Weise her. Jedem Strahl a des Mittelpunktes S ordnet man den Punkt A des Trägers s zu, in dem der Strahl a die Gerade s schneidet (Fig. 5). Für die so hergestellte Beziehung zwischen den Punkten einer Gerade und den Geraden eines Punktes hat man verschiedene Ausdrucksweisen. Entweder man nennt den Strahlenbüschel einen *Schein* der Punktreihe oder die Punktreihe einen *Schnitt* des

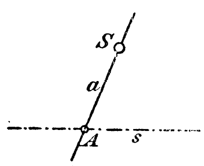

Fig. 5.

Strahlenbüschels oder schliefslich man sagt: Der Strahlenbüschel und die Punktreihe sind in *perspektiver Lage*. In Zeichen deutet man die perspektive Verwandtschaft an durch

$$S \overline{\overline{\wedge}}\, s,$$

gelesen: Der Strahlenbüschel S perspektiv zur Punktreihe s.

7. **Perspektive Strahlenbüschel und perspektive Punktreihen.** Im folgenden stellen wir eine Reihe von Sätzen nicht hinter, sondern neben einander. Dadurch wollen wir darauf aufmerksam machen, dafs man den rechts stehenden Satz aus dem links stehenden Satz erhält, indem man die Worte: Gerade (Strahl) und Punkt, Mittelpunkt und Träger, Strahlenbüschel und Punktreihe, Schnittpunkt und Verbindungslinie, Drehung und Bewegung mit einander vertauscht. Später (91 Z) werden wir in dem *Gesetz der Dualität* (oder Reziprozität) den Grund dafür kennen lernen, dafs man durch eine solche mechanische Vertauschung neue Sätze erhält. — Dem Lernenden wird empfohlen, den rechts stehenden Satz ohne Hülfe des Buches aus dem links stehenden abzuleiten. 7

Perspektive Strahlenbüschel. Um die Strahlen zweier Strahlenbüschel S und S_1 auf einander zu beziehen, nimmt man eine Punktreihe s zu Hülfe und weist jedem Strahl a von S den Strahl a_1 von S_1 zu, der durch den Schnittpunkt $A = s\,a$ geht.

Die beiden Strahlenbüschel S und S_1 sind nach der Konstruktion (Fig. 6) Scheine (6) einer und derselben Punktreihe s. Nennen wir zwei solche Büschel perspektiv, so können wir uns auch so ausdrücken:

Zwei Strahlenbüschel heifsen perspektiv, wenn sie Scheine einer und derselben Punktreihe sind.

In Zeichen: $S \overline{\overline{\wedge}}\, S_1$.

Perspektive Punktreihen. Um die Punkte zweier Punktreihen s und s_1 auf einander zu beziehen, nimmt man einen Strahlenbüschel S zu Hülfe und weist jedem Punkt A von s den Punkt A_1 von s_1 zu, der auf der Verbindungslinie $a = S\,A$ liegt.

Die beiden Punktreihen s und s_1 sind nach der Konstruktion (Fig. 7) Schnitte (6) eines und desselben Strahlenbüschels S. Nennen wir zwei solche Punktreihen perspektiv, so können wir uns auch so ausdrücken:

Zwei Punktreihen heifsen perspektiv, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind.

In Zeichen: $s \overline{\overline{\wedge}}\, s_1$.

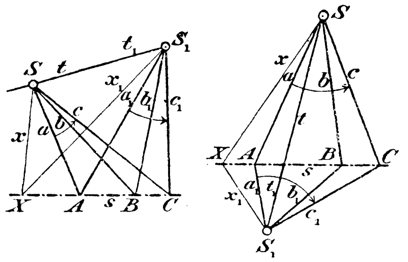

Fig. 6.

8 8. **Sich selbst homologer Strahl.** Der Strahl, welcher durch die Mittelpunkte S und S_1 geht, gehört sowohl zum Büschel S wie zum Büschel S_1. Er ist also als ein zweifacher Strahl zu betrachten und wird als solcher häufig mit zwei Buchstaben bezeichnet: mit t, wenn man ihn als Strahl des Büschels S; mit t_1, wenn man ihn als Strahl des Büschels S_1 ansieht.

Sucht man zu t vermittelst der Punktreihe s in der angegebenen(7) Weise den homologen(6) Strahl von S_1, so findet man t_1 (Fig. 6). Daher:

Sind zwei Strahlenbüschel in perspektiver Lage, so ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte sich selbst homolog.

9 9. **Drehung perspektiv zugeordneter Strahlen.** Dreht sich ein Strahl x um den Punkt S so, dafs sein Drehungssinn(4), etwa $a\ b\ c$ (Fig. 6), unver-

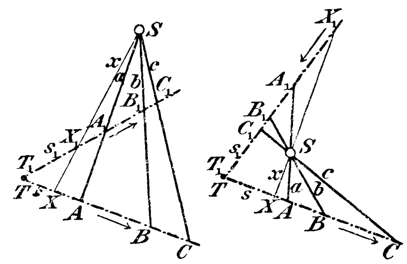

Fig. 7.

Sich selbst homologer Punkt. Der Punkt, in dem sich die Träger s und s_1 schneiden, gehört sowohl zur Reihe s wie zur Reihe s_1. Er ist also als ein zweifacher Punkt zu betrachten und wird als solcher häufig mit zwei Buchstaben bezeichnet: mit T, wenn man ihn als Punkt der Reihe s; mit T_1, wenn man ihn als Punkt der Reihe s_1 ansieht.

Sucht man zu T vermittelst des Büschels S in der angegebenen (7) Weise den homologen(6) Punkt von s_1, so findet man T_1 (Fig. 7). Daher:

Sind zwei Punktreihen in perspektiver Lage, so ist der Schnittpunkt der Träger sich selbst homolog.

Bewegung perspektiv zugeordneter Punkte. Durchläuft ein Punkt X die Gerade s so, dafs sein Bewegungssinn(5), etwa $A\ B\ C$ (Fig. 7), unändert bleibt, so durchläuft sein Schnittpunkt X mit einer nicht durch S gehenden Gerade s in einem bestimmten unveränderlichen Sinn ABC[5] die Gerade s. Der Strahl x_1, welcher den Punkt X mit einem aufserhalb s liegenden Punkte S_1 verbindet, dreht sich dann, während x sich um S dreht, um den Mittelpunkt S_1 in einem bestimmten unveränderlichen Sinn $a_1\, b_1\, c_1$.

Da bei unserer Konstruktion die Strahlenbüschel S und S_1 (vermittelst der Punktreihe s) perspektiv aufeinander bezogen sind[7], so können wir das Ergebnis so aussprechen:

Dreht sich ein Strahl x um den Mittelpunkt S in einem bestimmten unveränderlichen Sinn, so dafs er nacheinander mit jedem Strahl des Büschels S zusammenfällt, so dreht sich ein ihm perspektiv zugeordneter Strahl x_1 um seinen Mittelpunkt S_1 in einem bestimmten unveränderlichen Sinn, so dafs er ebenfalls nacheinander mit jedem Strahl des Mittelpunktes S_1 zusammenfällt.

verändert bleibt, so dreht sich seine Verbindungslinie x mit einem aufserhalb s liegenden Punkte S in einem bestimmten unveränderlichen Sinn $a\,b\,c$[4] um S. Der Punkt X_1, in dem die Verbindungslinie x eine nicht durch S gehende Gerade s_1 schneidet, durchläuft dann, während X sich auf s bewegt, den Träger s_1 in einem bestimmten unveränderlichen Sinn $A_1\, B_1\, C_1$.

Da bei unserer Konstruktion die Punktreihen s und s_1 (vermittelst des Strahlenbüschels S) perspektiv aufeinander bezogen sind[7], so können wir das Ergebnis so aussprechen:

Durchläuft ein Punkt X den Träger s in einem bestimmten unveränderlichen Sinn, so dafs er nacheinander mit jedem Punkt der Reihe s zusammenfällt, so durchläuft ein ihm perspektiv zugeordneter Punkt X_1 seinen Träger s_1 in einem bestimmten unveränderlichen Sinn, so dafs er ebenfalls nacheinander mit jedem Punkt des Trägers s_1 zusammenfällt.

10. **Elliptischer und hyperbolischer Wurf.** Die Reihenfolge von vier Punkten, die in einer Gerade liegen, sei $A\,B\,C\,D$, so dafs ein Punkt X, der die Gerade s im Sinne $A\,B\,C$[5] durchläuft, der Reihe nach mit $A\,B\,C\,D$ zusammenfällt. Fassen wir die vier Punkte in zwei Paare $A\,B$ und $C\,D$ zusammen und nennen $A\,B$ sowohl wie $C\,D$ ein *Punktpaar*, so wird bei der angegebenen Reihenfolge das Punktpaar $A\,B$ durch das Punktpaar $C\,D$ *nicht* getrennt, d. h. der 10

Punkt X gelangt von A nach B, ohne C oder D zu überschreiten. — Um uns bequemer ausdrücken zu können, führen wir ein neues Wort ein durch die

1. Definition: Der Inbegriff zweier Punktpaare heiſst ein (gerader Punkt-) *Wurf*; in Zeichen $AB \,.\, CD$.

Wir können dann sagen: In dem Wurf $AB \,.\, CD$ wird das Punktpaar AB durch das Punktpaar CD nicht getrennt.

Aus der Gruppe unserer vier Punkte können wir ferner den Wurf $AD \,.\, BC$ bilden. Unser Punkt X gelangt von A nach D, indem er B *und* C überschreitet. Würde er sich im entgegengesetzten Sinne bewegen, so würde er von A nach D gelangen, ohne B und C zu überschreiten. Auch in diesem Falle sagen wir: Das Punktpaar AD wird durch das Punktpaar BC *nicht* getrennt.

Bilden wir schlieſslich aus den vier Punkten $ABCD$ den Wurf $AC \,.\, BD$, so gelangt der Punkt X von A nach C, indem er B überschreitet, D dagegen nicht; bewegt er sich im entgegengesetzten Sinn, so gelangt er von A nach C, indem er D überschreitet, B aber nicht. In diesem Fall sagen wir: Das Punktpaar AC wird durch das Punktpaar BD getrennt. —

Um das Ergebnis zusammenfassen zu können, führen wir noch zwei neue Worte ein:

2. Definition: Ein Wurf, dessen Punktpaare einander trennen, heiſst *elliptisch*.

3. Definition: Ein Wurf, dessen Punktpaare einander nicht trennen, heiſst *hyperbolisch*.

Das Ergebnis unserer Betrachtungen lautet demnach:

4. Lehrsatz: *Aus vier Punkten lassen sich drei Würfe bilden; zwei von diesen drei Würfen sind hyperbolisch, der dritte ist elliptisch.*

11 11. **Der aus vier Strahlen gebildete Wurf.** Verbinden wir die vier Punkte $ABCD$ mit einem auſserhalb ihres Trägers s liegenden Punkte S durch die vier Strahlen $abcd$ und bezeichnen die Verbindungslinie $S(X)$ durch x (Fig. 7), so ergiebt sich aus den Betrachtungen von Nr. 9, daſs die Reihenfolge der Strahlen $abcd$ mit der Reihenfolge der Punkte $ABCD$ übereinstimmt. Gebrauchen wir statt der Worte: Wir verbinden die Punkte $ABCD$ mit dem Punkte

S durch die Strahlen $a\,b\,c\,d$, die gleichbedeutenden: Wir *projizieren* die Punkte $A\,B\,C\,D$ aus S durch die Strahlen $a\,b\,c\,d$, und nennen ferner noch zwei elliptische (oder hyperbolische) Würfe gleichartig, so haben wir

1. Lehrsatz: *Ein Punktwurf wird aus jedem Punkt durch einen gleichartigen Strahlenwurf projiziert.*

Es läſst sich daher der Satz Nr. 10_4 auf einen Strahlenwurf übertragen. Indem wir für Punkt und Strahl (und auch Ebene) das zusammenfassende Wort Element(2) anwenden, können wir sagen:

2. Lehrsatz: *Aus vier Elementen $A\,B\,C\,D$ lassen sich drei Würfe*

$$A\,B\,.\,C\,D;\ A\,C\,.\,B\,D;\ A\,D\,.\,B\,C$$

bilden; zwei von diesen drei Würfen sind hyperbolisch, der dritte ist elliptisch.

Zusatz. Wir sprechen nicht bloſs von einem Wurf gleich- z
artiger Elemente, sondern auch von einem Wurf, der bestimmt wird durch ein Punktpaar $A\,B$ und ein Strahlenpaar $c\,d$. Bezeichnen wir nämlich die Punkte, in denen die Verbindungslinie $s = A\,B$ von den Strahlen c und d geschnitten wird, durch C und D und die Strahlen, durch welche die Punkte A und B aus dem Schnittpunkt $S = c\,d$ projiziert werden, durch a und b, so verstehen wir unter dem durch das Punktpaar $A\,B$ und das Strahlenpaar $c\,d$ bestimmten Wurf $A\,B\,.\,c\,d$ entweder den Punktwurf $A\,B\,.\,C\,D$ oder den Strahlenwurf $a\,b\,.\,c\,d$. Je nachdem der Wurf $A\,B\,.\,C\,D$ ($a\,b\,.\,c\,d$) elliptisch oder hyperbolisch ist, sprechen wir von einem elliptischen oder hyperbolischen Wurf $A\,B\,.\,c\,d$; oder auch wir sagen: *Das Punktpaar $A\,B$ wird durch das Strahlenpaar $c\,d$ getrennt oder nicht getrennt.*

Diese Ausdrucksweise dehnen wir auch auf drei Punkte $A\,B\,C$ und einen Strahl d (oder auf drei Strahlen $a\,b\,c$ und einen Punkt D) aus, indem wir z. B. sagen: *Der Punkt C wird von dem Strahl d durch die Punkte A und B getrennt oder nicht getrennt.*

12. **Vorläufige Inhaltsangabe.** Der Inhalt der 12
Geometrie der Lage läſst sich an dieser Stelle bereits verständlich machen und zwar am anschaulichsten vermittelst der (links) konstruierten perspektiven Strahlenbüschel(7).

Denken wir uns die Strahlen $a\,b\,c\ldots$ von S und die ihnen homologen[6] $a_1\,b_1\,c_1\ldots$ von S_1 fest und dann den einen Büschel um seinen Mittelpunkt gedreht (ohne dafs die gegenseitige Lage der Strahlen sich ändert), sodafs also t[8] nicht mehr mit t_1 zusammenfällt, so liegen die Schnittpunkte der homologen Strahlen $a\,a_1$, $b\,b_1$, $c\,c_1\ldots$ nicht mehr in einer Gerade s, sondern in einer krummen Linie.

Das Aufsuchen der Eigenschaften, die die so entstandene krumme Linie hat, bildet den Inhalt dieses ganzen Buches.

13 13.* **Erläuterung durch den Kreis.** Verständlicher werden die in der vorhergehenden Nummer gemachten Andeutungen, wenn wir eine bekannte krumme Linie, den Kreis, auf die angegebene Weise entstehen lassen.

Wir beziehen zwei Strahlenbüschel S und S_1 nicht vermittelst einer beliebigen Gerade s, sondern vermittelst der unendlich fernen Gerade o der Zeichenebene[3] perspektiv aufeinander. Wir ordnen also[7] jedem Strahl a von S den Strahl a_1 von S_1 zu, der durch den Schnittpunkt von a und o geht, d. h. wir weisen jedem Strahl a von S den ihm parallelen Strahl a_1 von S_1 zu (Fig. 8). Da Winkel mit parallelen Schenkeln, wenn sie in demselben Sinn[4] gemessen werden, einander gleich sind, so ist der Winkel zwischen zwei beliebigen Strahlen $a\,b$ gleich dem von den homologen Strahlen $a_1\,b_1$ gebildeten Winkel, so dafs die beiden Strahlenbüschel S und S_1 einander kongruent sind. Die Gleichheit der Winkel bleibt bestehen, wenn wir z. B. den Büschel S_1 um seinen Mittelpunkt S_1 drehen. Auch in der neuen Lage ist also $\angle\,a\,b = \angle\,a_1\,b_1$ und folglich auch, wie ein Blick in die Fig. 8 lehrt, $\angle\,a\,a_1 = \angle\,b\,b_1$. Daraus folgt nach einem planimetrischen Satze, dafs die Schnittpunkte $\mathsf{A} = a\,a_1$, $\mathsf{B} = b\,b_1$ auf einem durch S und S_1 gehenden Kreise liegen. — Aus $\angle\,a\,a_1 = \angle\,t\,t_1$ folgt, nebenbei bemerkt, ferner noch, dafs t_1 in seiner neuen Lage Tangente an dem Kreise ist.

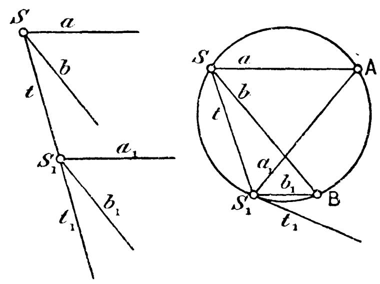

Fig. 8.

§ 2. Harmonische Elemente.

14. **Stereometrische Hülfssätze.** Der Fundamentalsatz[15] dieses Paragraphen wird durch stereometrische Betrachtungen gewonnen. Wir schicken daher, um den Beweis nicht unterbrechen zu müssen, die zu benutzenden stereometrischen Sätze voraus. 14

1. Zwei Geraden, die in einer Ebene liegen, schneiden sich in einem Punkte.

2. Zwei Geraden, die sich in einem Punkte schneiden, liegen in einer Ebene.

3. Zwei Ebenen schneiden sich in einer Gerade.

4. Schneiden sich zwei Geraden, die in zwei verschiedenen Ebenen liegen, so liegt ihr Schnittpunkt in der Schnittlinie beider Ebenen.

5. Vier Punkte lassen sich immer als die Ecken eines (räumlichen oder ebenen) Vierecks ansehen.

Lehrsatz: Wenn zwei Gegenseiten eines Vierecks sich schneiden, so schneiden sich auch die anderen Gegenseiten des Vierecks.

Beweis: Wenn die Gegenseiten $\Delta\mathrm{A}$ und $\mathrm{B}\Gamma$ des Vierecks $\Delta\mathrm{AB}\Gamma$ sich in P schneiden, so liegen die vier Ecken in der Ebene $P\mathrm{AB}$; alle Verbindungslinien der Ecken liegen daher in einer Ebene, folglich schneiden sie sich[14,1].

6. Lehrsatz: *Wenn je zwei von drei Geraden sich schneiden, so liegen die drei Geraden in einer Ebene oder gehen durch einen Punkt.*

Beweis: Nach der Voraussetzung schneiden sich b und c in A, c und a in B, a und b in C. Fällt A nicht mit B (und folglich auch nicht mit C) zusammen, so liegen die drei Geraden in der Ebene ABC. Fällt dagegen A mit B (und folglich auch mit C) zusammen, so gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

15. **Perspektiv liegende Dreiecke.** In einer Ebene σ 15
liege das Dreieck ABC mit den Seiten $a\,b\,c$; in einer zweiten Ebene σ_1 (oder auch in derselben Ebene σ) das Dreieck $\mathrm{AB}\Gamma$ mit den Seiten $\alpha\,\beta\,\gamma$. Wir wollen die Ecken A und A, B und B, C und Γ einander zuweisen und sie kurz homolog[6] nennen. Die Verbindungslinien homologer Ecken

nennen wir homologe Seiten. Durch die Zuordnung der Ecken der beiden Dreiecke ist dann auch jeder Seite des einen Dreiecks eine bestimmte Seite des andern zugeordnet. Und umgekehrt. —

1. Lehrsatz: *Wenn die drei Punkte, in denen sich die homologen Seiten zweier zugeordneten Dreiecke schneiden, in einer Gerade liegen, so gehen die drei Geraden, welche die homologen Ecken verbinden, durch einen Punkt.*

Beweis: Die beiden in derselben Ebene σ liegenden, zugeordneten Dreiecke seien $A\,B\,C$ und $A_1\,B_1\,C_1$ (Fig. 9); die drei Punkte, in denen die Seiten $a\,b\,c$ des Dreiecks $A\,B\,C$ von den homologen Seiten $a_1\,b_1\,c_1$ des Dreiecks $A_1\,B_1\,C_1$ geschnitten werden, seien $P\,Q\,R$; die Gerade, in der nach der Voraussetzung die drei Punkte $P\,Q\,R$ liegen, heiſse t.

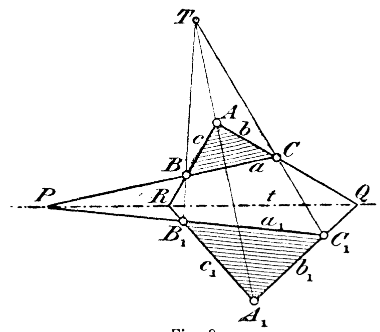

Fig. 9.

Wir legen durch die Gerade t eine (in der Figur nicht gezeichnete) beliebige Ebene σ_1 und ziehen in dieser durch die drei Punkte $P\,Q\,R$ drei beliebige Geraden $\alpha\,\beta\,\gamma$, die sich in den Punkten $\mathrm{A}\,\mathrm{B}\,\Gamma$ schneiden. Wir betrachten zunächst die beiden Dreiecke $A\,B\,C$ und $\mathrm{A}\,\mathrm{B}\,\Gamma$. Da $B\,C$ und $\mathrm{B}\,\Gamma$ sich in P schneiden, so müssen sich auch die Verbindungslinien $B\,\mathrm{B}$ und $C\,\Gamma$ schneiden$^{(14_5)}$; ebenso müssen sich die Verbindungslinien $C\,\Gamma$ und $A\,\mathrm{A}$ und die Verbindungslinien $A\,\mathrm{A}$ und $B\,\mathrm{B}$ schneiden. Da diese drei Verbindungslinien nicht in einer Ebene liegen, weil die Ebenen $A\,B\,C = \sigma$ und $\mathrm{A}\,\mathrm{B}\,\Gamma = \sigma_1$ nicht zusammenfallen, so gehen die drei Verbindungslinien $A\,\mathrm{A}$, $B\,\mathrm{B}$, $C\,\Gamma$ durch einen Punkt $S^{(14_6)}$.

Durch Betrachtung der Dreiecke $A_1\,B_1\,C_1$ und $\mathrm{A}\,\mathrm{B}\,\Gamma$ ergiebt sich in derselben Weise, daſs die Verbindungslinien $A_1\,\mathrm{A}$, $B_1\,\mathrm{B}$, $C_1\,\Gamma$ durch einen Punkt S_1 gehen.

Den Punkt, in dem die Ebene σ der Dreiecke $A\,B\,C$ und $A_1\,B_1\,C_1$ durch die Verbindungslinie der beiden Punkte S und S_1 geschnitten wird, nennen wir T. Weil nun $S\,A$

und $S_1 A_1$ nach der Konstruktion sich in Α schneiden, müssen sich auch $S S_1$ und $A A_1$ schneiden [14$_5$], mit andern Worten, $A A_1$ muſs durch T gehen. Ebenso müssen $B B_1$ und $C C_1$ durch T gehen. —

2. Lehrsatz: *Wenn die drei Geraden, welche die homologen Ecken zweier zugeordneten Dreiecke verbinden, durch einen Punkt gehen, so liegen die drei Punkte, in denen sich die homologen Seiten schneiden, in einer Gerade.*

Beweis: Wir legen durch den Punkt T (Fig. 9), in dem sich nach der Voraussetzung die drei Verbindungslinien homologer Ecken $A A_1$, $B B_1$, $C C_1$ schneiden, eine beliebige, nicht in σ liegende (in der Figur nicht gezeichnete) Gerade und nehmen in dieser zwei beliebige Punkte S und S_1 an. Weil $S S_1$ und $A A_1$ durch T gehen, so müssen sich auch $S A$ und $S_1 A_1$ in einem Punkte Α schneiden [14$_5$]; ebenso schneiden sich $S B$ und $S_1 B_1$ in einem Punkte Β, $S C$ und $S_1 C_1$ in einem Punkte Γ. Die drei Punkte Α Β Γ bestimmen eine Ebene σ_1, die die Ebene σ in der Gerade t schneiden möge [14$_3$].

Die Geraden $B C$ und $B_1 C_1$ schneiden sich [14$_1$], weil sie beide in der Ebene σ liegen; die Geraden $B C$ und Β Γ schneiden sich, weil B Β und C Γ durch S gehen [14$_5$]; die Geraden $B_1 C_1$ und Β Γ schneiden sich, weil B_1 Β und C_1 Γ durch S_1 gehen [14$_5$]. Die drei Geraden $B C$, $B_1 C_1$, Β Γ, von denen, wie wir sehen, je zwei sich schneiden, können aber nicht in einer Ebene σ liegen, weil sonst Β (und Γ) und mithin auch S gegen die Konstruktion in σ liegen müſste; sie gehen daher [14$_6$] durch einen Punkt P, und dieser liegt, weil z. B. $B C$ und Β Γ in zwei verschiedenen Ebenen σ und σ_1 liegen, in der Schnittlinie t von σ und σ_1 [14$_4$]. $B C$ und $B_1 C_1$ schneiden sich also in einem Punkte P von t. — Ebenso liegt auch der Schnittpunkt Q von $C A$ und $C_1 A_1$ und der Schnittpunkt R von $A B$ und $A_1 B_1$ in t.

Anmerkung. Wenn von zwei zugeordneten Dreiecken A
$A B C$ und $A_1 B_1 C_1$ *entweder* die Schnittpunkte homologer Seiten in einer Gerade liegen *oder* die Verbindungslinien homologer Ecken durch einen Punkt gehen, so heiſsen die Dreiecke *perspektiv liegend.* — Dieser (durch *stereometrische* Betrachtungen gewonnene) Lehrsatz (von Desargues) über perspektiv liegende Dreiecke bildet die Grundlage der Lehre von den harmonischen Elementen und damit der Geometrie der Lage.

16 16. **Viereck.** Vier Punkte einer Ebene können durch sechs Geraden verbunden werden. Nimmt man die vier Punkte zu Ecken eines Vierecks und nennt die Verbindungslinien Seiten, so lautet der vorstehende Satz:

Ein Viereck hat *sechs* Seiten.

Zwei Seiten, die nicht durch dieselbe Ecke gehen, heifsen *Gegenseiten*;

der Schnittpunkt zweier Gegenseiten heifst *Diagonalpunkt*;

die Verbindungslinie zweier Diagonalpunkte heifst *Diagonallinie*.

Ein Viereck hat demnach drei Paar Gegenseiten, drei Diagonalpunkte und drei Diagonallinien.

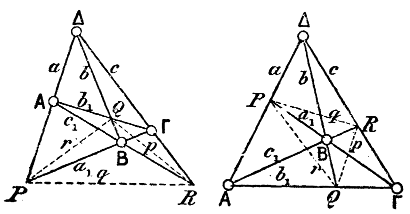

Fig. 10.

Die vier Ecken nennen wir Δ Α Β Γ (Fig. 10); die drei von Δ ausgehenden Seiten $a\,b\,c$, ihre Gegenseiten $a_1\ b_1\ c_1$. Ferner führen wir für die Diagonalpunkte und Diagonallinien die Bezeichnung ein:
$a\,a_1 = P;\ b\,b_1 = Q;\ c\,c_1 = R.$
$Q\,R = p;\ R\,P = q;\ PQ = r.$

16. **Vierseit.** Vier Geraden einer Ebene schneiden sich in sechs Punkten. Nimmt man die vier Geraden zu Seiten eines Vierseits und nennt die Schnittpunkte Ecken, so lautet der vorstehende Satz:

Ein Vierseit hat *sechs* Ecken.

Zwei Ecken, die nicht in derselben Seite liegen, heifsen *Gegenecken*;

die Verbindungslinie zweier Gegenecken heifst *Diagonallinie*;

der Schnittpunkt zweier Diagonallinien heifst *Diagonalpunkt*.

Ein Vierseit hat demnach drei Paar Gegenecken, drei Diagonallinien und drei Diagonalpunkte.

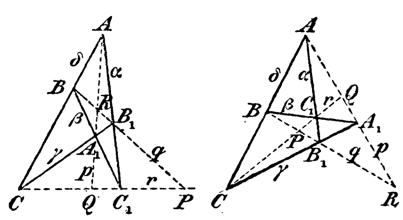

Fig. 11.

Die vier Seiten nennen wir $\delta\,\alpha\,\beta\,\gamma$ (Fig. 11); die drei in δ liegenden Ecken $A\,B\,C$, ihre Gegenecken $A_1\,B_1\,C_1$. Ferner führen wir für die Diagonallinien und Diagonalpunkte die Bezeichnung ein:
$A\,A_1 = p;\ B\,B_1 = q;\ C\,C_1 = r.$
$qr = P;\ rp = Q;\ pq = R.$

Zusatz. Um für die im folgenden sich ergebenden Beziehungen zwischen den Seiten und Diagonallinien eines Vierecks einen kurzen Ausdruck zu gewinnen, ordnen wir die Seiten und Diagonallinien einander zu und zwar jeder Seite (und ihrer Gegenseite) die Diagonallinie, welche die beiden *nicht* in der Seite liegenden Diagonalpunkte verbindet, sodaſs einander zugeordnet heiſsen

a (a_1) und p; b (b_1) und q; c (c_1) und r.

Anmerkung. In der Planimetrie legt man den Ecken eines Vierecks eine bestimmte Reihenfolge bei und nennt nur die Verbindungslinie von zwei *aufeinander folgenden* Ecken Seite, sodaſs ein planimetrisches Viereck vier Seiten hat. Ein solches Viereck heiſst ein *einfaches* im Gegensatz zum unsrigen, das wohl auch ein *vollständiges* genannt wird.

Allgemein heiſst ein Vieleck ein *einfaches*, wenn den Ecken eine bestimmte Reihenfolge beigelegt ist; ein einfaches Vieleck hat ebensoviel Seiten wie Ecken.

Zusatz. Um für die im folgenden sich ergebenden Beziehungen zwischen den Ecken und Diagonalpunkten eines Vierseits einen kurzen Ausdruck zu gewinnen, ordnen wir die Ecken und Diagonalpunkte einander zu und zwar jeder Ecke (und ihrer Gegenecke) den Diagonalpunkt, in welchem die beiden *nicht* durch die Ecke gehenden Diagonallinien sich schneiden, sodaſs einander zugeordnet heiſsen Z

A (A_1) und P; B (B_1) und Q; C (C_1) und R.

Anmerkung. In der Planimetrie legt man den Seiten eines Vierseits eine bestimmte Reihenfolge bei und nennt nur den Schnittpunkt von zwei *aufeinander folgenden* Seiten Ecke, sodaſs ein planimetrisches Vierseit vier Ecken hat. Ein solches Vierseit heiſst ein *einfaches* im Gegensatz zum unsrigen, das wohl auch ein *vollständiges* genannt wird. A

Allgemein heiſst ein Vielseit ein *einfaches*, wenn den Seiten eine bestimmte Reihenfolge beigelegt ist; ein einfaches Vielseit hat ebensoviel Ecken wie Seiten.

17. Konstruktion eines Vierecks. 17

Aufgabe: Es sind drei Punkte $P\,Q\,W$ gegeben, die in einer Gerade liegen. Man soll ein Viereck zeichnen, von dem P und Q zwei Diagonalpunkte sind, während eine Seite des dritten Diagonalpunktes durch W geht.

Lösung: Wir legen durch P zwei beliebige Geraden a und a_1, die von einer beliebigen durch W gelegten Gerade c in Δ und Γ geschnitten werden. Bezeichnen wir dann den Punkt, in welchem a von der Verbindungslinie Q Γ geschnitten wird, durch A, und den Punkt, in welchem a_1 von Q Δ geschnitten wird, durch B, so bilden Δ A B Γ die Ecken eines der verlangten Vierecke.

A *Anmerkung.* Später (26₁) werden wir sehen, daſs die Zeichnung des Punktes W_1, in dem die Seite A B die Diagonallinie PQ schneidet, für die Lehre von den harmonischen Punkten von der gröſsten Wichtigkeit ist. Der Leser hat sich daher mit der vorstehenden Konstruktion vollständig vertraut zu machen; er hat sie für verschiedene Lagen der Punkte PQW und unter Abänderung der Lage der willkürlich angenommenen Geraden $a\,a_1\,c$ zu wiederholen und einzuüben. Je gründlicher er diese Konstruktion beherrscht und die Einzelheiten der Vierecksfigur in sich aufnimmt, um so schneller wird er die folgenden Sätze verstehen.

18 18. **Zwei Diagonalpunkte und die Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes.** Zeichnen wir nach Nr. 17 *zwei* Vierecke (Fig. 12), von denen P und Q zwei Diagonalpunkte sind, so behaupten wir: Wenn die Seiten c und c' der dritten Diagonalpunkte R und R' sich in W schneiden, so gehen die Gegenseiten c_1 und c_1' dieser Seiten c und c' durch einen und denselben Punkt W_1 der gemeinsamen Diagonallinie PQ, mit andern Worten:

Wir behaupten, daſs der Punkt W_1 von der Wahl des Vierecks Δ A B Γ unabhängig, also nur von der Lage der drei Punkte $P\,Q\,W$ abhängig ist.

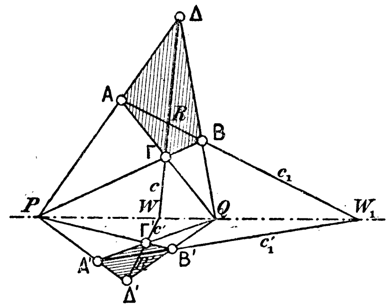

Fig. 12.

Beweis: Jedes der beiden gezeichneten Vierecke Δ A B Γ und Δ' A' B' Γ' zerlegen wir in zwei Dreiecke und betrachten zunächst Δ Γ A und Δ' Γ' A'. Diese beiden Dreiecke liegen perspektiv [15 A], weil der Schnittpunkt W von Δ Γ und Δ′ Γ′, der Schnittpunkt P von Δ A und Δ′ A′, der Schnittpunkt Q von A Γ und A′ Γ′ in einer Gerade liegen. Die drei (in der Figur nicht gezeichneten) Verbindungslinien homologer Ecken Δ Δ′, Γ Γ′, A A′ gehen daher [15$_1$] durch einen Punkt T. — Ferner liegen die Dreiecke Δ Γ B und Δ′ Γ′ B′ perspektiv; es gehen daher [15$_1$] die drei Verbindungslinien Δ Δ′, Γ Γ′, B B′ durch einen Punkt, mit andern Worten, B B′ geht durch den Schnittpunkt von Δ Δ′ und Γ Γ′, d. i. T.

Betrachten wir schliefslich die beiden Dreiecke A B Γ und A′ B′ Γ′, so liegen diese perspektiv, weil, wie wir eben bewiesen haben, die Verbindungslinien homologer Ecken A A′, B B′, Γ Γ′ durch einen Punkt T gehen. Weil nun B Γ und B′ Γ′ sich in P, Γ A und Γ′ A′ sich in Q schneiden, so müssen A B und A′ B′ durch einen und denselben Punkt W_1 von $P\,Q$ [15$_2$] gehen.

19. **Vertauschbarkeit der Punktpaare.** Die drei 19
Punkte $P\,Q\,W$, von denen wir beim vorhergehenden Satz ausgingen, sind nicht gleichartig. Wir wollen dies dadurch andeuten, dafs wir die Punkte P und Q, die Diagonalpunkte unserer Vierecke sind, ein Punktpaar nennen und beim Schreiben von W trennen: $P\,Q\,.\,W$. Es ist dann [18] durch $P\,Q\,.\,W$ der Punkt W_1 eindeutig bestimmt. Es fragt sich nun, ob wir, ausgehend von $W\,W_1\,.\,Q$, zum Punkte P gelangen.

Wir nehmen also an (Fig. 13), dafs von dem Viereck Δ A B Γ die beiden Punkte P und Q zwei Diagonalpunkte sind und dafs die beiden Punkte W und W_1 auf den Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes R liegen. Betrachten wir die beiden Dreiecke Δ A Q und $W_1\,W\,R$ und ordnen die Ecken in der hingeschriebenen Reihenfolge einander zu [15], so sehen wir, dafs der Schnittpunkt P von Δ A und $W_1\,W$, der Schnittpunkt Γ von A Q und $W\,R$, der Schnittpunkt B von Q Δ und $R\,W_1$ in einer

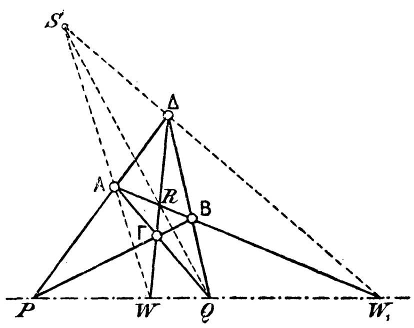

Fig. 13.

Gerade liegen. Es gehen daher [15_1] die Verbindungslinien homologer Ecken ΔW_1, $\mathsf{A} W$, $Q R$ durch einen Punkt S. Wir haben damit ein Viereck $S R \Delta \mathsf{A}$ gezeichnet, von dem W und W_1 zwei Diagonalpunkte sind, während die Seite $S R$ des dritten Diagonalpunktes durch Q geht. Da die Gegenseite $\Delta \mathsf{A}$ von $S R$ durch P geht, so erkennen wir, daſs wir, ausgehend von $W W_1 . Q$, zum Punkt P gelangen; die beiden Punktpaare $P Q$ und $W W_1$ können also miteinander vertauscht werden.

20 20. **Harmonische Punkte.** Auf den in den Nummern 18 und 19 gewonnenen Ergebnissen werden die folgenden Sätze aufgebaut; es ist daher nötig, diese Ergebnisse in einem knappen, für die Anwendung bequemen Ausdruck zusammenzufassen. Zu einem solchen Ausdruck gelangen wir mit Hülfe der

1. Definition: *Zwei Diagonalpunkte eines Vierecks und diejenigen beiden Punkte ihrer Verbindungslinie, welche auf den Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes liegen, heiſsen vier harmonische Punkte; sie bilden, wie man auch sagt, einen harmonischen Wurf* [10_1].

Ein harmonischer Wurf besteht aus zwei gleichartigen [19] Punktpaaren $P Q$ und $W W_1$; wir bezeichnen ihn durch $P Q . W W_1$ oder $W W_1 . Q P$ usw.

Die Ergebnisse von 18 und 19 können wir jetzt so aussprechen:

2. Lehrsatz: *Durch ein Punktpaar und einen Punkt ist der vierte harmonische Punkt bestimmt*

oder

Stimmen zwei harmonische Würfe in einem Punktpaar und einem Punkt überein, so stimmen sie auch im vierten Punkt überein.

In Zeichen: Wenn $P Q . W W_1$ und $W_2 W . P Q$ zwei harmonische Würfe sind, so fällt W_2 in W_1.

21 21. **Harmonische Strahlen.** Die folgende Konstruktion: Wir verbinden den Punkt S mit dem Punkt A und bestimmen den Schnittpunkt A_1 dieser Verbindungslinie $S A$ mit einer Gerade t_1, beschreiben wir kurz mit den Worten: Wir projizieren (vgl. 11) den Punkt A aus dem Punkte S auf die Gerade t_1.

Wenn wir nun die vier harmonischen Punkte$^{(20_1)}$ $AB \,.\, CD$ aus irgend einem Punkte S auf die beliebige Gerade t_1 projizieren, so bilden $A_1 B_1 \,.\, C_1 D_1$, wie wir beweisen wollen, wieder einen harmonischen Wurf. Zunächst beweisen wir den Satz aber nicht für eine beliebige, sondern für eine durch den Punkt D gehende Gerade.

Wir projizieren (Fig. 14) den Punkt C_1 aus A auf $S\,(B)$ und aus B auf $S\,(A)$. Bezeichnen wir den Schnittpunkt von $C_1 A$ und $S\,(B)$ durch B, den Schnittpunkt von $C_1 B$ und $S\,(A)$ durch A, so bilden $S\, C_1\, \mathsf{A}\, \mathsf{B}$ ein Viereck, von dem A und B zwei Diagonalpunkte sind, während eine Seite des dritten Diagonalpunktes durch C geht; die Gegenseite $\mathsf{A}\,\mathsf{B}$ mufs daher$^{(20_2)}$ durch D gehen. Betrachten wir nun das Viereck $A\,B\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}$, so sehen wir, dafs von diesem C_1 und D zwei Diagonalpunkte sind, während die Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes S durch A_1 und B_1 gehen; $A_1 B_1 \,.\, C_1 D$ sind also$^{(20_1)}$ vier harmonische Punkte. —

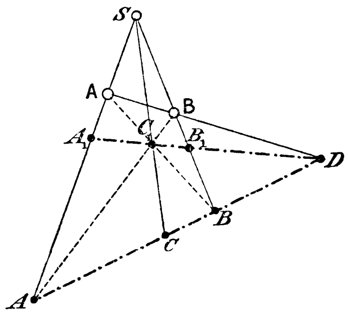

Fig. 14.

Wir wenden uns jetzt zu dem allgemeinen Fall: Wir projizieren also die vier harmonischen Punkte $AB \,.\, CD$ aus S auf eine beliebige (nicht durch D gehende) Gerade t_1 und behaupten, dafs $A_1 B_1 \,.\, C_1 D_1$ ebenfalls vier harmonische Punkte sind.

Verbinden wir A_1 und D und bezeichnen die Punkte, in denen diese Verbindungslinie von den Projektionsstrahlen $S\,(B)$ und $S\,(C)$ geschnitten wird, durch B' und C', so sind nach dem eben geführten Beweise, weil $AB \,.\, CD$ vier harmonische Punkte sind, auch $A_1 B' \,.\, C' D$ vier harmonische Punkte; und weil $A_1 B' \,.\, C' D$ vier harmonische Punkte sind, sind es auch $A_1 B_1 \,.\, C_1 D_1$. Daher:

1. Lehrsatz: Durch Projektion eines harmonischen Wurfes erhalten wir wieder einen harmonischen Wurf.

Für manche Anwendungen ist es vorteilhaft, diesem Satz durch Einführung des Begriffes der harmonischen Strahlen eine andere Form zu geben.

2. Definition: *Vier Strahlen heifsen harmonisch, wenn sie durch vier harmonische Punkte gehen.*

3. Lehrsatz: *Vier harmonische Strahlen schneiden jede Gerade in vier harmonischen Punkten.*

22 22. **Harmonische Ebenen.**

1. Definition: Vier Ebenen eines Ebenenbüschels[(2)] heifsen harmonisch, wenn sie durch vier harmonische Punkte gehen.

2. Lehrsatz: *Vier harmonische Ebenen eines Büschels schneiden jede Ebene in vier harmonischen Strahlen.*

Beweis: Eine beliebige Ebene ε_1, die nicht durch die Achse[(2)] g des Ebenenbüschels geht, werde von den vier harmonischen Ebenen $\alpha\,\beta\,.\,\gamma\,\delta$ des Büschels in den Strahlen $a_1\,b_1\,.\,c_1\,d_1$ geschnitten; es ist zu beweisen, dafs $a_1\,b_1\,.\,c_1\,d_1$ durch vier harmonische Punkte gehen[(21₂)].

Wir verbinden einen beliebigen Punkt S der Achse g mit den vier harmonischen Punkten $A\,B\,.\,C\,D$, durch welche nach der Voraussetzung die vier Ebenen $\alpha\,\beta\,.\,\gamma\,\delta$ gehen. Weil SA und a_1 in der Ebene α liegen, so schneidet SA den Strahl a_1 in einem Punkte A_1[(14₁)]; ferner schneiden die Verbindungslinien SB, SC, SD die Strahlen $b_1\,c_1\,d_1$ in $B_1\,C_1\,D_1$. Diese vier Punkte $A_1\,B_1\,.\,C_1\,D_1$ sind harmonisch, weil sie die Projektion des harmonischen Wurfes $A\,B\,.\,C\,D$ bilden[(21₁)]. —

3. Lehrsatz: Die vier Ebenen, durch welche vier harmonische Strahlen aus einem beliebigen Punkte projiziert werden, bilden einen harmonischen Wurf.

Beweis: Die vier Ebenen, welche den beliebigen Punkt T mit den vier harmonischen Strahlen $a\,b\,.\,c\,d$ des Mittelpunktes S verbinden, gehören dem Ebenenbüschel mit der Achse TS an. Nach der Voraussetzung gehen $a\,b\,.\,c\,d$ durch vier harmonische Punkte[(21₂)] $A\,B\,.\,C\,D$; durch diese gehen auch die vier Ebenen von TS. —

4. Lehrsatz: *Vier harmonische Ebenen schneiden jede Gerade in vier harmonischen Punkten.*

Beweis: Wir legen durch die Gerade t, welche von den vier harmonischen Ebenen in den Punkten $A\,B\,.\,C\,D$ geschnitten wird, eine beliebige Ebene ε. Diese wird[(22₂)] von den vier harmonischen Ebenen in vier harmonischen

Strahlen $a\,b\,.\,c\,d$ geschnitten. Da diese vier harmonischen Strahlen durch $A\,B\,.\,C\,D$ gehen, so sind $A\,B\,.\,C\,D$ vier harmonische Punkte[(21$_3$)].

23. **Harmonische Elemente.** Haben wir die beiden har- 23
monischen Strahlenwürfe $p\,q\,.\,w\,w_1$ und $p\,q\,.\,w\,w_2$, die in den drei Strahlen $p\,q\,w$ übereinstimmen, so müssen sie auch im vierten übereinstimmen; denn die beiden harmonischen Punktwürfe $PQ\,.\,W\,W_1$ und $P\,Q\,.\,W\,W_2$, in denen eine beliebige Gerade von unsern beiden harmonischen Strahlenwürfen geschnitten wird[(21$_3$)], sind identisch[(20$_2$)].

Da sich dasselbe von zwei harmonischen Ebenenwürfen, die in drei Ebenen übereinstimmen, aussagen läfst, so ist der Satz Nr. 20_2 nicht blofs für Punkte, sondern für alle Elemente gültig:

Durch ein Elementenpaar und ein Element ist das vierte harmonische Element bestimmt.

24. **Harmonische Punkte eines Vierecks.** Bilden 24
wir aus den vier harmonischen Punkten $P\,Q\,.\,W\,W_1$ die drei Würfe

$$P\,W\,.\,Q\,W_1;\quad P\,W_1\,.\,Q\,W;\quad P\,Q\,.\,W\,W_1,$$

so mufs einer und nur einer dieser drei Würfe elliptisch sein[(10)].

Wäre dieser Wurf $P\,W\,.\,Q\,W_1$ (Fig. 15), so müfste, wenn wir ihn aus Δ auf $\mathsf{A}\,\mathsf{B}$ projizierten, $\mathsf{A}\,R\,.\,\mathsf{B}\,W_1$ ein elliptischer Wurf sein[(11$_1$)]; gleichzeitig müfste, wie wir durch Projektion des Wurfes $P\,W\,.\,Q\,W_1$ aus Γ erkennen, $\mathsf{B}\,R\,.\,\mathsf{A}\,W_1$ ein elliptischer Wurf sein. Da dies nicht möglich ist[(10$_4$)], so kann $P\,W\,.\,Q\,W_1$ kein aus zwei getrennten Punktpaaren bestehender Wurf sein.

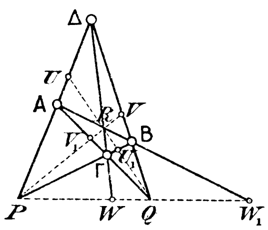

Fig. 15.

Ebenso überzeugt man sich davon, dafs auch $P\,W_1\,.\,Q\,W$ kein elliptischer Wurf sein kann. Daher besteht der Wurf $P\,Q\,.\,W\,W_1$ aus zwei getrennten Punktpaaren[(10$_4$)]:

1. Lehrsatz: *Die beiden Punktpaare, die einen harmonischen Wurf bilden, trennen einander.*

Aus diesem Lehrsatz ergiebt sich[20_1] mit Hülfe der in Nr. 11 Z eingeführten Ausdrucksweise:

2. *Je zwei Diagonalpunkte eines Vierecks werden durch die beiden Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes harmonisch getrennt.* —

Aus der Fig. 15 ergiebt sich noch durch Projektion des harmonischen Wurfes $PQ \,.\, WW_1$ aus Δ (oder Γ) auf die Vierecksseite AB, dafs $\mathsf{AB} \,.\, RW_1$ ein harmonischer Wurf ist[21_1]:

3. Je zwei Ecken eines Vierecks, der in ihrer Verbindungslinie liegende Diagonalpunkt und die zugeordnete[16 Z] Diagonallinie bilden einen harmonischen Wurf.

25 25. **Harmonische Strahlen eines Vierseits.** Wir betrachten ein Vierseit $\delta\,\alpha\,\beta\,\gamma$ (Fig. 16) mit den Gegenecken $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1$. Zwei Paar Gegenecken, z. B. AA_1 und BB_1, lassen sich als die Ecken eines Vierecks auffassen, von welchem das dritte Paar Gegenecken CC_1 zwei Diagonalpunkte sind; die Diagonallinien p und q sind die Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes. Wir können daher den Inhalt von Nr. 24_2 auch vermittelst des Vierseits ausdrücken:

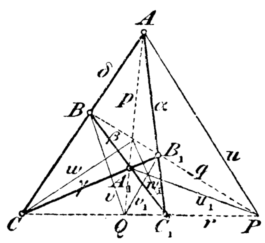

Fig. 16.

1. *Je zwei Diagonallinien eines Vierseits werden durch die beiden Gegenecken der dritten Diagonallinie harmonisch getrennt.*

Weil, wie wir eben sahen, $CC_1 \,.\, QP$ (Fig. 16) vier harmonische Punkte und daher ihre Verbindungslinien mit A vier harmonische Strahlen[21_2] sind, so haben wir:

2. Je zwei Seiten eines Vierseits, die durch ihren Schnittpunkt gehende Diagonallinie und der zugeordnete[16 Z] Diagonalpunkt bilden einen harmonischen Wurf.

26 26. **Konstruktion des vierten harmonischen Elementes.**

1. Aufgabe: *Den von einem gegebenen Punkte durch ein gegebenes Punktpaar harmonisch getrennten Punkt zu zeichnen.*

Die Aufgabe: Den von W durch P und Q harmonisch getrennten Punkt (W_1) zu zeichnen, ist in Nr. 17 bereits gelöst. —

> 2. Aufgabe: *Den von einem gegebenen Strahl durch ein gegebenes Strahlenpaar harmonisch getrennten Strahl zu zeichnen.*

Die Zeichnung, die sich durch duale Übertragung(7) aus Nr. 17 ableiten läfst, wird dem Lernenden überlassen.

Eine andere Lösung ergiebt sich dadurch, dafs man die drei gegebenen Strahlen durch eine beliebige Gerade schneidet und zu den drei Schnittpunkten den vierten harmonischen Punkt zeichnet. — Auch die Ausführung dieser Zeichnung wird dem Lernenden empfohlen.

Zusatz. Verfolgt man die Konstruktion(17) für den Fall, z
dafs der Punkt Q in den Punkt P fällt, so erkennt man, dafs die Punkte A und B mit P zusammenfallen; daher fällt auch W_1 in P. — Läfst man den Punkt W in Q fallen, so fällt A in Δ und B in Γ, der Punkt W_1 also in Q.

Ähnliches ergiebt sich für die duale 2. Aufgabe. Daher:

> *Wenn eins von vier harmonischen Elementen mit einem zweiten zusammenfällt, so fällt es auch noch mit einem dritten zusammen.*

27.* **Mittelpunkt und uneigentlicher Punkt einer Strecke.** 27
Die Geometrie der Lage hat vor der Planimetrie den grofsen Vorzug, dafs sie ihre Sätze immer in der allgemeinsten Form gewinnt, so dafs sich viele planimetrische Sätze als besondere Fälle aus den Sätzen der Geometrie der Lage ablesen lassen. Wir beweisen daher in dieser und der folgenden Nummer zwei Sätze, die wir später bei der Ableitung planimetrischer Sätze vielfach verwerten werden.

> Aufgabe: Den Punkt einer Strecke zu finden, der von dem uneigentlichen(3) Punkte durch die beiden Endpunkte harmonisch getrennt ist.

Lösung: Wenn P und Q (Fig. 17) die Endpunkte der Strecke sind und W_∞ der uneigentliche Punkt, so legen wir(17) durch P zwei beliebige Strahlen, die von einem beliebig durch W_∞ gelegten Strahl, d. i.(3) von einer beliebigen Parallele zu PQ, in Δ und Γ geschnitten werden. Treffen die Verbindungslinien $Q\Gamma$ und $Q\Delta$ die durch P

gelegten Strahlen in A und B, so schneidet A B die Strecke PQ in dem vierten harmonischen Punkte W.

Wir behaupten, dafs der gezeichnete vierte harmonische Punkt W der Mittelpunkt von PQ ist. — Sehen wir zunächst A und dann B als Strahlenmittelpunkt an, so haben wir nach einem Satze der Proportionslehre

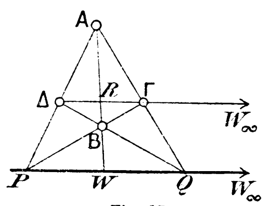

Fig. 17.

$$WP : R\Delta = WQ : R\Gamma$$
$$WP : R\Gamma = WQ : R\Delta,$$

folglich durch Multiplikation $WP^2 = WQ^2$. Daraus folgt entweder $WP = WQ$ oder $WP = -WQ$. Wäre $WP = WQ$, so fielen P und Q zusammen. Es ist daher $WP = -WQ$, d. h. W ist der Mittelpunkt von PQ. Das Ergebnis sprechen wir aus in dem

1. Lehrsatz: *Die Endpunkte, der Mittelpunkt und der uneigentliche Punkt einer Strecke sind vier harmonische Punkte.*

Da durch drei Punkte der vierte harmonische bestimmt ist $^{(20_2)}$, so läfst sich dem vorstehenden Satze die Form geben:

2. *Wenn von vier harmonischen Punkten der eine der uneigentliche (der Mittelpunkt) ist, so ist der zugeordnete der Mittelpunkt (der uneigentliche).*

28 **28*. Zwei Strahlen und die Halbierungslinien ihrer Winkel.**

1. *Zwei Strahlen und die Halbierungslinien der beiden von den Strahlen gebildeten Winkel bilden einen harmonischen Wurf.*

Beweis: a und b (Fig. 18) seien die beiden Strahlen und c und d die Halbierungslinien der durch a und b bestimmten Nebenwinkel. Wir verbinden einen beliebigen Punkt C der Halbierungslinie c mit dem uneigentlichen Punkte D_∞ der zweiten Halbierungslinie d und bezeichnen die Punkte, in denen diese Verbindungslinie die Strahlen a und b schneidet, durch A und B. Weil die Halbierungslinien c und d aufeinander senkrecht stehen, so ist $\angle SCA = SCB$ und daher

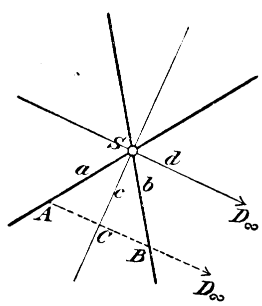

Fig. 18.

Dreieck $SCA \cong SCB$, folglich $AC = CB$. Es sind also [(27_1)] $AB.CD_\infty$ vier harmonische Punkte und folglich [(21_2)] $ab.cd$ vier harmonische Strahlen. —

Da durch drei Strahlen der vierte harmonische bestimmt ist [(23)], so läſst sich dem vorstehenden Satz auch die Form geben:

2. *Wenn von vier harmonischen Strahlen $ab.cd$ der eine c den Winkel ab halbiert, so halbiert der c zugeordnete Strahl d den Nebenwinkel von ab.* —

3. *Wenn zwei zugeordnete Strahlen eines harmonischen Wurfes auf einander senkrecht stehen, so halbieren sie die von den beiden andern zugeordneten Strahlen gebildeten Winkel.*

Beweis: Verbinden wir wieder einen beliebigen Punkt C (Fig. 18) des einen der beiden senkrecht aufeinanderstehenden Strahlen c und d mit dem unendlich fernen Punkt D_∞ des andern, so sind, weil $ab.cd$ nach der Voraussetzung harmonische Strahlen sind, $AB.CD_\infty$ vier harmonische Punkte [(21_3)]. Mithin ist C der Mittelpunkt von AB [(27_2)] und daher Dreieck $SCA \cong SCB$, folglich $\angle\, ac = cb$.

---

§ 3. Projektive Verwandtschaft gerader Grundgebilde.

29. **Homologe Elemente in zwei geraden Grundgebilden.** In Nr. 6 haben wir die einfachste Art, die Elemente eines Strahlenbüschels und einer Punktreihe einander zuzuordnen, kennen gelernt: Wir wiesen jedem Strahl a des Büschels S den Punkt A der Punktreihe s zu, in dem s von a geschnitten wird. In Nr. 7 lernten wir dann z. B. zwei Strahlenbüschel S und S_1 aufeinander beziehen: Wir nahmen eine Punktreihe s zu Hülfe und wiesen die Strahlen von S und S_1 einander als homolog zu, die durch denselben Punkt von s gehen. 29

Diese in Nr. 6 und 7 gelehrte Zuordnung zweier geraden Grundgebilde [(2)] könnten wir die direkte nennen zum Unterschied von der folgenden,

bei welcher wir, um zwei Strahlenbüschel S und S_1 aufeinander zu beziehen, einen dritten beliebigen Strahlen-

bei welcher wir, um zwei Punktreihen s und s_1 aufeinander zu beziehen, eine dritte beliebige Punktreihe σ zu Hülfe büschel Σ zu Hülfe nehmen und diesen nach 7 vermittelst einer beliebigen Punktreihe s auf S und vermittelst einer zweiten beliebigen Punktreihe s_1 auf S_1 beziehen.

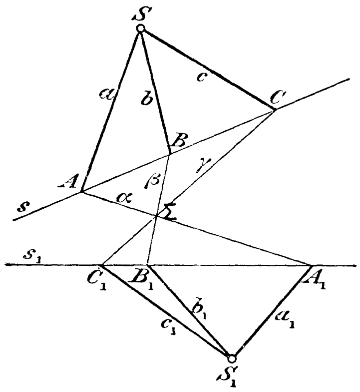

Fig. 19.

Dem Strahl a von S (Fig. 19) ordnen wir also einen Strahl a_1 von S_1 durch die folgende Konstruktion zu: Wir bestimmen den Schnittpunkt $s\,(a) = A$ und ziehen die Verbindungslinie $\Sigma\ (A) = \alpha$; der Schnittpunkt $s_1\,(\alpha) = A_1$ wird dann aus S_1 durch den a homologen Strahl a_1 projiziert.

nehmen und diese nach 7 vermittelst eines beliebigen Strahlenbüschels S auf s und vermittelst eines zweiten beliebigen Strahlenbüschels S_1 auf s_1 beziehen.

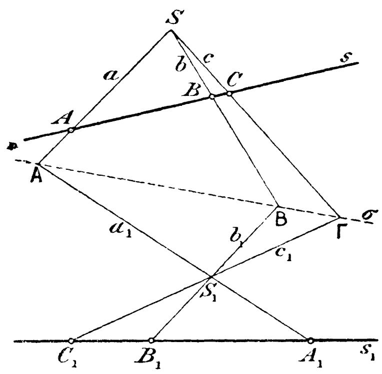

Fig. 20.

Dem Punkt A von s (Fig. 20) ordnen wir also einen Punkt A_1 von s_1 durch die folgende Konstruktion zu: Wir ziehen die Verbindungslinie $S\ (A) = a$ und bestimmen den Schnittpunkt $\sigma\,(a) = \mathsf{A}$; die Verbindungslinie $S_1\ (\mathsf{A}) = a_1$ schneidet dann s_1 in dem A homologen Punkte A_1.

A *Anmerkung*. Das Studium der eben gezeichneten Figur wird uns von jetzt an ununterbrochen beschäftigen. Die vorstehende Konstruktion ist daher für verschiedene Lagen des Punktes Σ und der Hülfsgeraden s und s_1 zu wiederholen und insbesondere auch für den Fall einzuüben, dafs s durch S_1 und s_1 durch S geht.

30 30. **Projektive Verwandtschaft.** Die früher (6; 7) direkt aufeinander bezogenen Gebilde nannten wir perspektiv; für die nach unserm jetzigen (29) Verfahren auf-

einander bezogenen einförmigen Grundgebilde wollen wir das Wort *projektiv* einführen. Da wir statt *eines* Strahlenbüschels Σ zwischen S und S_1 noch mehrere $\Sigma_1\, \Sigma_2 \ldots$ einschalten könnten, so geben wir für das Wort projektiv die folgende

1. Definition: *Zwei gerade Grundgebilde heifsen projektiv, wenn sie die Endglieder einer Kette von perspektiv liegenden Gebilden sind.*

Hat die Kette nur zwei oder drei Glieder, so sind die Endglieder in perspektiver Lage (6; 7). Die perspektive Verwandtschaft ist also ein besonderer Fall der projektiven:

2. Perspektiv liegende Grundgebilde sind projektiv.—

Aus der Definition folgt ferner:

3. *Sind zwei gerade Grundgebilde einem dritten projektiv, so sind sie auch einander projektiv.* —

Wenden wir den Satz (9) über die Bewegung perspektiv zugeordneter Elemente auf die aufeinanderfolgenden Glieder einer Kette von perspektiv liegenden Gebilden an, so haben wir

4. Durchläuft ein Element ein einförmiges Grundgebilde in einem bestimmten unveränderlichen Sinn, sodafs es nacheinander mit jedem Element des Gebildes zusammenfällt, so durchläuft das homologe Element ein projektiv zugeordnetes Grundgebilde in einem bestimmten unveränderlichen Sinn, sodafs es ebenfalls nacheinander mit jedem Element dieses Gebildes zusammenfällt. —

Wenden wir ebenso den Satz (21) über harmonische Strahlen und für den Fall, dafs auch Ebenenbüschel unter den Gliedern unserer Kette sind, den Satz (22) über harmonische Ebenen auf die aufeinanderfolgenden Glieder der Kette an, so haben wir

5. *In zwei projektiven Grundgebilden sind vier Elementen, die einen harmonischen Wurf bilden, vier Elemente homolog, die wieder einen harmonischen Wurf bilden.*

31. **Konstruktion zweier projektiven Grundgebilde.** 31
In Nr. 7 haben wir die Elemente zweier Grundgebilde, z. B. zweier Strahlenbüschel S und S_1, einander *perspektiv* zugeordnet, indem wir die Hülfsgerade s willkürlich annahmen. Durch passende Wahl von s können wir nun eine perspektive Verwandtschaft von der Art herstellen, dafs *zwei* gegebenen Strahlen $a\, b$ von S zwei gegebene Strahlen $a_1\, b_1$ von S_1

homolog sind: wir brauchen nur als Hülfsgerade s der perspektiven Zuordnung die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte zu nehmen, in denen sich die Strahlen $a\,a_1$ und die Strahlen $b\,b_1$ schneiden.

In Nr. 29 haben wir die Strahlen zweier Strahlenbüschel S und S_1 einander *projektiv* zugeordnet, indem wir den Punkt Σ und die Geraden s und s_1 willkürlich annahmen. Wir wollen jetzt zeigen, dafs wir durch passende Wahl von $\Sigma\,s\,s_1$ eine projektive Verwandtschaft von der Art herstellen können, dafs *drei* gegebenen Strahlen $a\,b\,c$ von S drei gegebene Strahlen $a_1\,b_1\,c_1$ von S_1 homolog sind.

Aufgabe: *Zwei Strahlenbüschel projektiv so auf einander zu beziehen, dafs drei gegebenen Strahlen des einen Büschels drei gegebene des andern homolog sind.*

Allgemeine Lösung: Die Zuordnung soll so erfolgen, dafs den Strahlen $a\,b\,c$ (Fig. 21) des einen Büschels S die Strahlen $a_1\,b_1\,c_1$ des andern Büschels S_1 homolog sind. — Wir legen

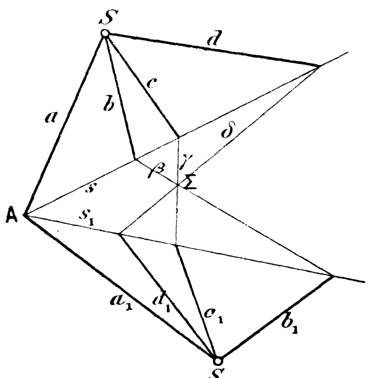

Fig. 21.

durch den Schnittpunkt zweier homologen Strahlen, z. B. durch $a\,a_1 = \mathsf{A}$, zwei beliebige Ge-

Aufgabe: *Zwei Punktreihen projektiv so aufeinander zu beziehen, dafs drei gegebenen Punkten der einen Reihe drei gegebene der andern homolog sind.*

Allgemeine Lösung: Die Zuordnung soll so erfolgen, dafs den Punkten $A\,B\,C$ (Fig. 22) der einen Reihe s die Punkte $A_1\,B_1\,C_1$ der andern Reihe s_1 homolog sind. — Wir wählen

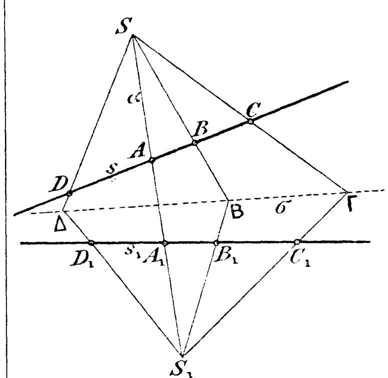

Fig. 22.

auf der Verbindungslinie zweier homologen Punkte, z. B. auf $A\,A_1 = \alpha$, zwei beraden s und s_1, ziehen die Verbindungslinie β der Schnittpunkte s (b) und s_1 (b_1) und die Verbindungslinie γ der Schnittpunkte s (c) und s_1 (c_1) und bestimmen den Schnittpunkt $\beta \gamma = \Sigma$. Beziehen wir dann S und Σ vermittelst s, und Σ und S_1 vermittelst s_1 auf einander (7), so erhalten wir die verlangte Zuordnung der Strahlenbüschel S und S_1. — Ist z. B. d ein beliebiger Strahl von S, so bestimmt der Schnittpunkt s (d) in Σ den Strahl δ und der Schnittpunkt s_1 (δ) in S_1 den gesuchten homologen Strahl d_1. —

Besondere Lösungen: Unter den verschiedenen Lagen, die man den durch $\mathsf{A} = a a_1$ gehenden Hülfsgeraden s und s_1 geben kann, sind zwei von besonderer Wichtigkeit:

1. s und s_1 fallen mit den Geraden zusammen, die A mit

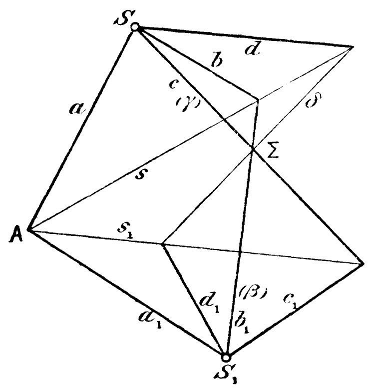

Fig. 23.

liebige Punkte S und S_1, bestimmen den Schnittpunkt B der Verbindungslinien S (B) und S_1 (B_1) und den Schnittpunkt Γ der Verbindungslinien S (C) und S_1 (C_1) und ziehen die Verbindungslinie $\mathsf{B}\,\Gamma = \sigma$. Beziehen wir dann s und σ vermittelst S, und σ und s_1 vermittelst S_1 auf einander (7), so erhalten wir die verlangte Zuordnung der Punktreihen s und s_1. — Ist z. B. D ein beliebiger Punkt von s, so bestimmt die Verbindungslinie S (D) in σ den Punkt Δ und die Verbindungslinie S_1 (Δ) in s_1 den gesuchten homologen Punkt D_1. —

Besondere Lösungen: Unter den verschiedenen Lagen, die man den auf $\alpha = A A_1$ liegenden Hülfspunkten S und S_1 geben kann, sind zwei von besonderer Wichtigkeit:

1. S und S_1 fallen mit den Punkten zusammen, in denen

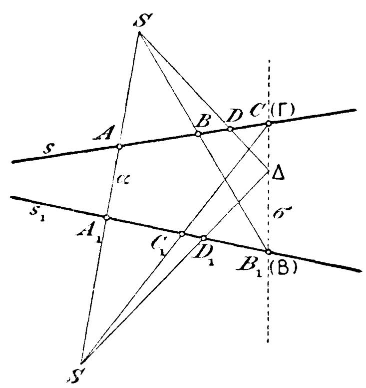

Fig. 24.

den Schnittpunkten der beiden andern Paare von homologen Strahlen $b b_1$ und $c c_1$ verbinden (Fig. 23);

2. s fällt mit der Verbindungslinie $\mathsf{A} S_1 = a_1$ und s_1 mit der Verbindungslinie $\mathsf{A} S = a$ zusammen (Fig. 25).

α von den Verbindungslinien der beiden andern Paare von homologen Punkten $B B_1$ und $C C_1$ geschnitten wird (Fig. 24);

2. S fällt mit dem Schnittpunkt $\alpha s_1 = A_1$ und S_1 mit dem Schnittpunkt $\alpha s = A$ zusammen (Fig. 26).

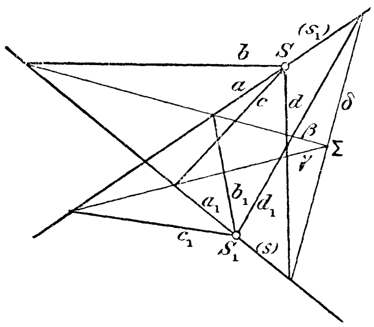

Fig. 25.

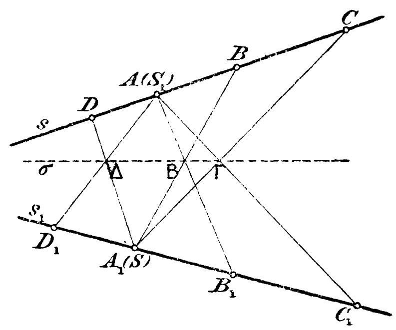

Fig. 26.

A *Anmerkung.* Der Lernende darf nicht unterlassen, die Zeichnungen zu diesen Lösungen selbständig auszuführen und sie mit den Fig. 23—25 zu vergleichen; wir werden von den besondern Lösungen öfter Gebrauch machen als von der allgemeinen.

32 32. **Fundamentalsatz.** Unser nächstes Ziel ist, zu beweisen, dafs die durch die vorhergehende Konstruktion (31) hergestellte projektive Verwandtschaft von der Wahl der Hülfsgeraden und Hülfspunkte unabhängig ist, dafs wir also immer dieselbe Zuordnung in den Grundgebilden erhalten, wie wir auch Hülfsgeraden und Hülfspunkte wählen mögen. Um diese Behauptung z. B. für zwei Punktreihen s und s_1 zu beweisen, haben wir zunächst zwei projektive Punktreihen zu betrachten, die denselben Träger haben, mit andern Worten, den besondern Fall zu behandeln, dafs die beiden Geraden s und s_1 zusammenfallen. Sind also $A B C$ irgend drei Punkte von s und $A_1 B_1 C_1$ drei Punkte derselben Gerade s, so haben wir eine projektive Verwandtschaft herzustellen, in der den Punkten $A B C$ die Punkte $A_1 B_1 C_1$ homolog sind. Wir erreichen dies, indem wir eine beliebige

Gerade s' zu Hülfe nehmen, auf dieser drei beliebige Punkte $A' B' C'$ wählen und nun [31] die Punktreihen s und s' projektiv so aufeinander beziehen, erstens dafs den Punkten $A\ B\ C$ die Punkte $A' B' C'$ homolog sind, und dann zweitens so, dafs den Punkten $A_1\ B_1\ C_1$ die Punkte $A' B' C'$ homolog sind. Auf diese Weise erhalten wir in s zwei projektive [30_3] Punktreihen der verlangten Art.

Wir wenden uns jetzt dem besondern Fall zu, dafs es in den beiden in s konstruierten projektiven Punktreihen *drei* Punkte giebt, die mit ihren homologen zusammenfallen. Bezeichnen wir diese der Reihe nach durch $K\ L\ M$ (Fig. 27), so setzen wir also voraus, dafs K mit K_1, L mit L_1, M mit M_1 zusammenfällt. Durchläuft nun X die erste Punktreihe in dem unveränderlichen Sinn $K\ L\ M$, so durchläuft [30_4] sein homologer Punkt X_1 die zweite Punktreihe in dem Sinn $K_1\ L_1\ M_1$, d. i., weil $K\ L\ M$ mit $K_1\ L_1\ M_1$ zusammenfallen, in demselben Sinn wie X. Bei dieser Bewegung fällt der Punkt X nach der Voraussetzung dreimal mit seinem homologen zusammen. Wir wollen zeigen, dafs er immer mit seinem homologen zusammenfällt; zunächst aber beweisen wir nur, dafs er unendlich oft mit seinem homologen zusammenfällt.

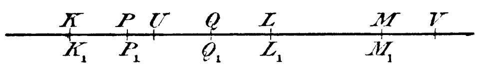

Fig. 27.

Ist nämlich N der von M durch K und L harmonisch getrennte Punkt, so wissen wir [30_5], dafs den Punkten $K\ L\ .\ M\ N$, die einen harmonischen Wurf bilden, vier Punkte homolog sind, die wieder einen harmonischen Wurf bilden. Zeichnen wir also den von M_1 durch K_1 und L_1 harmonisch getrennten Punkt N_1, so ist dieser dem Punkt N homolog. Da aber unsere beiden harmonischen Würfe $K\ L\ .\ M\ N$ und $K_1\ L_1\ .\ M_1\ N_1$ in drei Punkten übereinstimmen, so fällt N_1 in N [20_2]. Ebenso können wir beweisen, dafs der von M durch K und N harmonisch getrennte Punkt mit seinem homologen zusammenfällt usw. —

Wir folgen nun dem Punkte X, während er sich im Sinn $K\ L\ M$ von K nach L bewegt. In K fällt er noch mit dem homologen zusammen; würde er also auf diesem Wege in einem folgenden Punkte U nicht mehr mit seinem homologen zusammenfallen, so müfste er sich beim Überschreiten eines *vor* U liegenden Punktes P (vielleicht schon gleich in K) von seinem homologen getrennt haben; bei der weitern Bewegung, also *hinter* U, würde er wieder mit seinem homologen zusammenfallen, etwa in Q (möglicherweise erst in L).

Das Ergebnis ist: In den Punkten P und Q (die auch mit K und L zusammenfallen könnten) fällt X mit seinem homologen zusammen; während seiner Bewegung von P nach Q aber nicht. Das ist jedoch unmöglich. Zeichnen wir nämlich den von M durch P und Q harmonisch getrennten Punkt W, so fällt dieser, wie wir im ersten Teil unseres Beweises gesehen haben, mit seinem homologen zusammen; der Punkt X gelangt aber nach W, *bevor* er Q erreicht; denn die Punktpaare des harmonischen Wurfes $P\,Q\,.\,M\,W$ trennen einander$^{(24_1)}$. — Der Punkt X fällt also auf dem Wege $K\,L$ stets mit seinem homologen zusammen. —

Um einzusehen, daſs ein beliebiger Punkt V von $K\,\dot{}\,L$ $^{(5)}$ mit seinem homologen zusammenfällt, zeichnen wir den von V durch K und L harmonisch getrennten Punkt. Da dieser ein Punkt von $K\,L$ ist$^{(24_1)}$, so fällt er, wie wir eben bewiesen haben, mit seinem homologen zusammen; folglich auch V $^{(20_2)}$.

Lehrsatz: *Wenn zwei projektive Punktreihen drei Punkte entsprechend gemein haben, so haben sie jeden Punkt entsprechend gemein.*

33 33. **Kennzeichen der Identität zweier projektiven Grundgebilde.** Der vorstehende Satz läſst sich auf alle Grundgebilde übertragen. Wenn z. B. in zwei projektiven Ebenenbüscheln, die eine gemeinsame Achse haben, drei Ebenen $\varkappa\,\lambda\,\mu$ mit ihren homologen $\varkappa_1\,\lambda_1\,\mu_1$ zusammenfallen, so werden in einer beliebigen Gerade zwei zu den beiden Ebenenbüscheln$^{(30_2)}$ und daher zueinander$^{(30_3)}$ projektive Punktreihen ausgeschnitten, die drei Punkte und folglich jeden Punkt$^{(32)}$ entsprechend gemein haben; die beiden Ebenenbüschel haben daher auch jede Ebene entsprechend gemein.

1. *Wenn zwei projektive Grundgebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie jedes Element entsprechend gemein.*

Aus diesem Satz ergiebt sich, daſs die Konstruktion$^{(31)}$, durch welche wir zwei Grundgebilde s und s_1 projektiv so auf einander bezogen, daſs den Elementen $A\,B\,C$ die Elemente $A_1\,B_1\,C_1$ homolog wurden, trotz der Willkür in der

Wahl der benutzten Hülfsgeraden und Hülfspunkte eine eindeutige ist. Würden wir nämlich die Konstruktion mit andern Hülfsgeraden und Hülfspunkten wiederholen, so würden wir in s_1 zwei projektive[30$_3$] Grundgebilde erhalten, die die drei Elemente $A_1\,B_1\,C_1$ und daher jedes Element entsprechend gemeinsam hätten, also identisch wären. Daher:

2. *Die projektive Verwandtschaft zwischen zwei einförmigen Grundgebilden ist durch drei Paar homologe Elemente bestimmt.*

Zusatz. Das Zeichen für die projektive Verwandtschaft z
ist $\barwedge$ (gelesen: projektiv zu). Die Thatsache, daſs die Grundgebilde s und s_1 projektiv so aufeinander bezogen sind, daſs den Elementen $A\,B\,C\,..\,D\,E\,F\ldots$ die Elemente $A_1\,B_1\,C_1\,..\,D_1\,E_1\,F_1\ldots$ homolog sind, drücken wir also in Zeichen aus durch

$$A\,B\,C\,..\,D\,E\,F\ldots \barwedge A_1\,B_1\,C_1\,..\,D_1\,E_1\,F_1\ldots$$

oder auch kurz durch $s \barwedge s_1$. —

1. Aus $\qquad A\,B\,C\,D \barwedge A\,B\,C\,E$

folgt[33$_1$], daſs das Element D mit dem Element E zusammenfällt. —

2. Aus
$$A\,B\,C\,D \barwedge A_1\,B_1\,C_1\,D_1 \text{ und}$$
$$A\,C\,D\,E \barwedge A_1\,C_1\,D_1\,E_1$$

ergiebt sich, weil wir die projektive Verwandtschaft als bestimmt[33$_2$] durch die drei Elementenpaare $A\,A_1$, $C\,C_1$, $D\,D_1$ ansehen können,

$$A\,B\,C\,D\,E \barwedge A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1 \text{ oder auch}$$
$$A\,B\,D\,E \barwedge A_1\,B_1\,D_1\,E_1.$$

3. Ist ferner noch

$$C\,D\,E\,F \barwedge C_1\,D_1\,E_1\,F_1, \text{ so ist auch}$$
$$A\,B\,C\,D\,E\,F \barwedge A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1\,F_1 \text{ und}$$
$$A\,D\,E\,F \barwedge A_1\,D_1\,E_1\,F_1 \text{ u. s. w.}$$

34. **Kennzeichen der perspektiven Lage zweier projektiven Grundgebilde.** In Nr. 30_2 haben wir bereits bemerkt, daſs die perspektive Verwandtschaft ein besonderer Fall der projektiven ist; es handelt sich jetzt darum, ein Kenn- 34

zeichen dafür zu finden, wann zwei projektive Gebilde in perspektiver Lage sind. In Nr. 8 sahen wir, dafs in zwei perspektiven Grundgebilden das beiden Trägern gemeinsame Element sich selbst homolog ist. Es läfst sich nun umgekehrt zeigen:

Wenn zwei projektive Strahlenbüschel die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte entsprechend gemein haben, so sind sie in perspektiver Lage, mit andern Worten[6]*, so sind sie Scheine einer und derselben Punktreihe.*

Wenn zwei projektive Punktreihen den Schnittpunkt ihrer Träger entsprechend gemein haben, so sind sie in perspektiver Lage, mit andern Worten[6]*, so sind sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels.*

Beweis: (Von jetzt an beschränken wir uns auf die Anführung der dualen[7] Sätze und überlassen es dem Lernenden, die Begründung dieser dualen Sätze selbst abzuleiten.) Die Verbindungslinie σ (Fig. 28) der Punkte A und B, in denen zwei beliebige Strahlen a und b des ersten Büschels S von den homologen Strahlen a_1 und b_1 des zweiten Büschels S_1 geschnitten werden, möge von dem den beiden Büscheln gemeinsamen Strahle $S S_1 = m\,(m_1)$ in M geschnitten werden. Bezeichnen wir ferner die Punkte, in denen σ von $c\,d\ldots$ geschnitten wird, durch $\Gamma\,\Delta\ldots$; die Punkte, in denen σ von $c_1\,d_1\ldots$ geschnitten wird, durch $\Gamma_1\,\Delta_1\ldots$, so ist

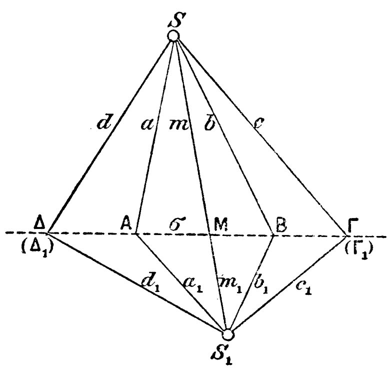

Fig. 28.

$$\mathrm{A\,B\,M\,\Gamma\,\Delta}\ldots \overline{\overline{\wedge}}\; a\,b\,m\,c\,d\ldots \overline{\wedge}\; a_1\,b_1\,m_1\,c_1\,d_1\ldots \overline{\overline{\wedge}}\; \mathrm{A\,B\,M\,\Gamma_1\,\Delta_1}\ldots$$

Folglich fallen Γ und Γ_1, Δ und $\Delta_1\ldots$ zusammen[33 Z 1]. Die beiden Strahlenbüschel S und S_1 sind also Scheine der Punktreihe σ.

In Zeichen: Aus

$a\,b\,c\,..\,\boldsymbol{m}\,...\,\overline{\wedge}\,a_1\,b_1\,c_1\,..\,\boldsymbol{m}\,...$

folgt, dafs die Schnittpunkte $a\,a_1$, $b\,b_1$, $c\,c_1\,...$ in einer Gerade liegen.

In Zeichen: Aus

$A\,B\,C\,..\,\boldsymbol{M}\,...\,\overline{\wedge}\,A_1\,B_1\,C_1\,..\,\boldsymbol{M}\,...$

folgt, dafs die Verbindungslinien $A\,A_1$, $B\,B_1$, $C\,C_1\,...$ durch einen Punkt gehen.

35. **Einschalten von perspektiven Gliedern zwischen die projektiven Endglieder einer Kette.** 35

1. Lehrsatz: Zwei projektive Punktreihen, deren Träger *nicht* zusammenfallen, lassen sich durch Einschalten *einer* Punktreihe, deren Träger eine beliebige Gerade ist, in perspektive Lage bringen.

1. Lehrsatz: Zwei projektive Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte *nicht* zusammenfallen, lassen sich durch Einschalten *eines* Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt ein beliebiger Punkt ist, in perspektive Lage bringen.

Beweis: s und s_1 (Fig. 29) seien die Träger der beiden gegebenen projektiven Punktreihen und σ eine beliebige Gerade, die s in B und s_1 in C_1 schneidet. Den Punkten B und C_1 seien die Punkte B_1 und C homolog, aufserdem sei $A\,A_1$ ein beliebiges drittes Paar homologer Punkte. Wird dann $A\,A_1$ von σ, $B\,B_1$ und $C\,C_1$ in A, S_1 und S geschnitten, so sind 1. die durch $A\,B\,C\,\overline{\wedge}\,\mathsf{A}\,B\,C_1$ in s und σ bestimmten(33₂) projektiven Punktreihen, weil $B = s\,\sigma$ ein sich selbst homologer Punkt ist, Schnitte des Strahlenbüschels S(34) und 2. die durch $\mathsf{A}\,B\,C_1\,\overline{\wedge}\,A_1\,B_1\,C_1$ in σ und s_1 bestimmten projektiven Punktreihen, weil $C_1 = \sigma\,s_1$ ein sich selbst homologer Punkt ist, Schnitte des Strahlenbüschels S_1. Durch die in σ konstruierte Punktreihe ist also in der That die Kette zwischen s und s_1 geschlossen. —

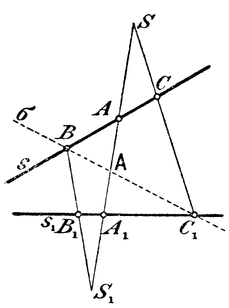

Fig. 29.

Fallen die Träger s und s_1 zusammen, so hat man zuerst eine Gerade s' (vgl. 32) einzuschalten, auf der man drei Punkte $A'\,B'\,C'$ so wählt, dafs sie perspektiv zu $A\,B\,C$ liegen; die Punktreihe $A'\,B'\,C'$ bezieht man dann vermittelst einer beliebigen Gerade σ_1 projektiv auf s_1(31).

2. Lehrsatz: Zwei projektive Punktreihen, deren Träger zusammenfallen, lassen sich durch Einschalten zweier Punktreihen, deren Träger beliebige Geraden sind, in perspektive Lage bringen.

2. Lehrsatz: Zwei projektive Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte zusammenfallen, lassen sich durch Einschalten zweier Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte beliebige Punkte sind, in perspektive Lage bringen.

36 36. **Andere Methode des Einschaltens.** Für die in Nr. 35 gelöste Aufgabe: Zwei projektive Grundgebilde als Endglieder einer Kette von perspektiven Gebilden darzustellen, geben wir noch weitere Konstruktionen: zunächst für den Fall, dafs die beiden Träger s und s_1 nicht zusammenfallen und dann in Nr. 37 und 38 für zwei zusammenfallende Träger. Trotzdem diese Konstruktionen als besondere Fälle in der allgemeinen Konstruktion von Nr. 35 enthalten sind, ist es nötig, sie eingehend zu behandeln, da sie uns zu wichtigen Lehrsätzen führen. —

Wir projizieren die Punktreihe s_1 (Fig. 30) aus einem Punkte A, der in dem Träger s liegt, im übrigen aber beliebig ist; dann die Punktreihe s aus dem A homologen

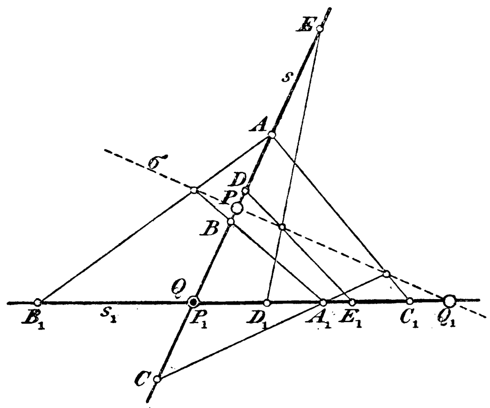

Fig. 30.

Punkte A_1 von s_1. Diese beiden projektiven Strahlenbüschel $A(A_1 B_1 C_1 \ldots)$ und $A_1(A B C \ldots)$ sind, weil sie den Strahl $A A_1$ entsprechend gemein haben, Scheine(34) einer und derselben Punktreihe σ.

Wir richten unser Augenmerk auf die Punkte P und Q_1, in denen s und s_1 von σ geschnitten werden. Die Strahlen $A\,P$ und $A_1\,P$ sind, weil sie durch denselben Punkt von σ gehen, homolog; der Strahl $A\,P$ muſs also den dem Punkte P homologen Punkt projizieren, d. h. der Schnittpunkt $P_1 = s\,s_1$ ist dem Schnittpunkt $P = s\,\sigma$ homolog. Der Schnittpunkt $s\,s_1$ ist gleichzeitig ein Punkt von s; bezeichnen wir ihn als solchen durch Q, so ergiebt sich in derselben Weise, daſs Q dem Schnittpunkte $Q_1 = \sigma\,s_1$ homolog ist.

Das Ergebnis ist, daſs die Hülfsgerade σ die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte P und Q_1 ist, die dem Schnittpunkte P_1 (Q) in den beiden Punktreihen von s und s_1 homolog sind, *daſs σ also unabhängig von der Wahl des beliebig in s angenommenen Punktes A ist.* Mit andern Worten: Wir erhalten immer dieselbe Gerade σ, ob wir von dem Punkte A oder irgend einem andern Punkte D ausgehen; auf der Gerade σ schneiden sich daher nicht nur $A\,B_1$ und $A_1\,B$, $A\,C_1$ und $A_1\,C$ u. s. w., sondern auch irgend zwei beliebige Strahlen $D\,E_1$ und $D_1\,E$.

Nennen wir die Gerade $P\,Q_1$, die die dem Schnittpunkte homologen Punkte verbindet, die *Achse* der projektiven Verwandtschaft der Punktreihen s und s_1 oder kurz die *Projektionsachse*, so haben wir den

Lehrsatz: Die Gerade, welche einen beliebigen Punkt D der Punktreihe s mit einem beliebigen Punkte E_1 der projektiven Punktreihe s_1 verbindet, schneidet die Gerade, die die homologen Punkte D_1 und E verbindet, in einem Punkte der Projektionsachse.

Lehrsatz: Der Punkt, in dem ein beliebiger Strahl d des Strahlenbüschels S von einem beliebigen Strahl e_1 des projektiven Strahlenbüschels S_1 geschnitten wird, liegt mit dem Punkte, in dem die homologen Strahlen d_1 und e sich schneiden, in einem Strahle des Projektionszentrums.

Zusatz. Der Satz läſst sich vom Begriff der projektiven Verwandtschaft loslösen, indem wir ihn auf drei Punktpaare $A\,A_1$, $B\,B_1$, $C\,C_1$ beschränken. Von diesen sechs Punkten müssen $A\,B\,C$ in einer Gerade s und $A_1\,B_1\,C_1$ in einer zweiten Gerade s_1 liegen; im übrigen können sie ganz beliebig sein. Unser Satz sagt dann aus, dafs die Verbindungslinien AB_1 und A_1B; BC_1 und B_1C; CA_1 und C_1A sich in drei Punkten einer Gerade schneiden.

Nehmen wir die sechs Punkte als Ecken eines einfachen (16 A) Sechsecks $AB_1CA_1BC_1$, so sind die Verbindungslinien die Seiten dieses Sechsecks. Bequemer wird die Übersicht, wenn wir (Fig. 31) die Ecken dieses Sechsecks der Reihe nach mit 1 2 3 4 5 6 bezeichnen und folgende Namen einführen.

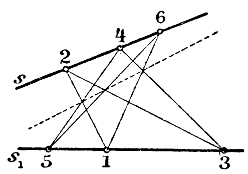

Fig. 31.

Die Ecken 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 heifsen Gegenecken und die Seiten 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61, die sich am bequemsten aus dem Schema

1 2 3 4 5 6

ergeben, heifsen Gegenseiten. Ferner wollen wir die Verbindungslinie zweier Gegenecken eine Diagonallinie und den Schnittpunkt zweier Gegenseiten einen Diagonalpunkt nennen, so dafs sind

Diagonallinien: 14; 25; 36;

Diagonalpunkte: (23) . (56); (34) . (61); (12) . (45).

Wir können demnach unserm Satz die folgende Form geben:

Erster Sechseckssatz. Liegen drei Ecken eines einfachen Sechsecks in einer Gerade und die Gegenecken dieser drei Ecken in einer zweiten Gerade, so liegen die drei Diagonalpunkte in einer dritten Gerade.	*Erster Sechsseitssatz.* Gehen drei Seiten eines einfachen Sechsseits durch einen Punkt und die Gegenseiten dieser drei Seiten durch einen zweiten Punkt, so gehen die drei Diagonallinien durch einen dritten Punkt.

37 37. **Das zweite Ordnungselement einer Projektivität.** Um zwei projektive Punktreihen, deren Träger s und s_1 zusammenfallen, in perspektive Lage zu bringen, haben wir im allgemeinen (35₂) zwei Hülfsgeraden s' und σ_1 nötig; in dem besondern Falle aber, dafs es in dem gemeinsamen Träger $s\,(s_1)$

einen Punkt K giebt, der mit seinem homologen K_1 zusammenfällt, genügt eine Gerade s':

Wir legen durch den Punkt K (Fig. 32), der nach unserer Annahme mit seinem homologen K_1 zusammenfällt, eine beliebige Gerade s' und wählen auf dieser zwei beliebige Punkte B' und C'. Sind nun $B B_1$ und $C C_1$ irgend zwei Paare homologer Punkte des gemeinsamen Trägers s (s_1), so ziehen wir die Verbindungslinien BB' und CC', $B_1 B'$ und $C_1 C'$; den Schnittpunkt der beiden

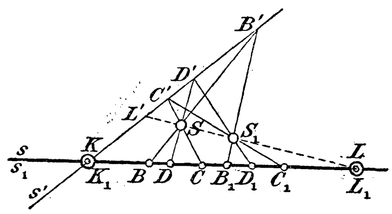

Fig. 32.

ersten Verbindungslinien bezeichnen wir durch S, den Schnittpunkt des zweiten Paares durch S_1. Es sind dann 1. die durch $K B C \barwedge K B' C'$ in s und s' bestimmten[33₂] projektiven Punktreihen Schnitte des Strahlenbüschels S[34] und 2. die durch $K B' C' \barwedge K B_1 C_1$ in s' und s_1 bestimmten projektiven Punktreihen Schnitte des Strahlenbüschels S_1. Durch die in s' konstruierte Punktreihe ist also in der That die Kette zwischen s und s_1 geschlossen. —

Zu einem beliebigen Punkte D der ersten Punktreihe von s erhalten wir den homologen D_1 der zweiten, indem wir D aus S auf s' und den gefundenen Punkt D' aus S_1 wieder auf s projizieren.

Wenden wir diese Konstruktion auf den Punkt L an, in dem der Träger s von der Verbindungslinie $S S_1$ geschnitten wird, so erkennen wir, daſs der homologe Punkt L_1 mit L zusammenfällt. Es fällt also nicht bloſs der Punkt K mit seinem homologen zusammen, sondern auch noch ein zweiter Punkt L. (Ein dritter Punkt kann nicht mit seinem homologen zusammenfallen[32], weil nach unserer Annahme B nicht mit B_1 zusammenfällt.)

Das Ergebnis kleiden wir in Worte mit Hülfe der folgenden beiden Definitionen:

1. Der Inbegriff zweier projektiven geraden Grundgebilde, die einen gemeinsamen Träger haben, heiſst eine gerade *Projektivität.*

2. Ein Element einer Projektivität, das mit seinem homologen zusammenfällt, heifst ein *Ordnungselement.* —

Da sich der Satz, den wir für zwei Punktreihen bewiesen haben, auf die übrigen Grundgebilde übertragen läfst (33), so haben wir:

3. *Hat eine gerade Projektivität* ein *Ordnungselement, so hat sie auch noch ein zweites.*

A *Anmerkung.* Die eben gelehrte Herstellung der projektiven Verwandtschaft zwischen den beiden in $s\,(s_1)$ liegenden Punktreihen können wir, indem wir die Projektionscentren in eckigen Klammern hinzufügen, in Zeichen kurz so beschreiben:

$$K\,B\,C\,[S]\;\overline{\overline{\wedge}}\;K\,B'\,C'\,[S_1]\;\overline{\overline{\wedge}}\;K\,B_1\,C_1.$$

38 38. **Elemente, die sich zweifach entsprechen.** Fallen die Träger s und s_1 zweier projektiven Punktreihen zusammen, so haben wir jeden Punkt des gemeinsamen Trägers $s\ (s_1)$ als einen zweifachen aufzufassen, da wir ihn entweder zur ersten oder zur zweiten Punktreihe rechnen können. Dementsprechend wollen wir jeden Punkt des Trägers $s\ (s_1)$ durch zwei Buchstaben bezeichnen, z. B. durch $D\,(E_1)$; wir können dann schon durch die Bezeichnung D oder E_1 andeuten, ob wir den Punkt als Element der ersten oder als Element der zweiten Punktreihe ansehen wollen.

Entspricht nun dem Punkte A der ersten Punktreihe der Punkt A_1 der zweiten, so wird dem Punkte A_1, wenn wir ihn zur ersten Punktreihe rechnen und dementsprechend mit B bezeichnen, ein Punkt B_1 homolog sein, der im allgemeinen nicht mit A zusammenfällt. Fällt aber der Punkt B_1 in den Punkt A, so wollen wir sagen:

Der Punkt $A\ (B_1)$ entspricht dem Punkte $A_1\ (B)$ *zweifach.*

Wir gehen jetzt zum zweiten besondern Fall der Aufgabe über: Die Punkte zweier zusammenfallenden Träger s und s_1 projektiv so aufeinander zu beziehen, dafs den Punkten $A\,B\,C$ die Punkte $A_1\,B_1\,C_1$ homolog werden, und zwar wollen wir die Punkte $A\,B\,C$ und $A_1\,B_1\,C_1$ nicht beliebig annehmen, sondern von ihnen voraussetzen, dafs A und B_1, A_1 und B zusammenfallen, mit andern Worten, dafs der Punkt $A\ (B_1)$ dem Punkt $A_1\ (B)$ zweifach entspricht.

Lösung: Wir legen durch C_1 (Fig. 33) die beliebige Gerade σ und durch C die beliebige Gerade σ_1, welche σ in Γ schneiden möge. Durch A_1 (B) legen wir eine beliebige Gerade, die σ in B und σ_1 in A_1 schneidet. Damit haben wir ein Dreiseit mit den Seiten $s\,(s_1)\,\sigma\,\sigma_1$ und den Ecken $\Gamma\,C\,C_1$ gezeichnet; diesem Dreiseit ist das Dreieck $A\,(B_1)$ $\mathsf{B}\,\mathsf{A}_1$ eingeschrieben.

Wir wollen nun
die Träger s und σ vermittelst des Strahlenbüschels A_1,
die Träger σ und σ_1 vermittelst des Strahlenbüschels $A\,(B_1)$,
die Träger σ_1 und s_1 vermittelst des Strahlenbüschels B
perspektiv aufeinander beziehen, was wir in Zeichen (37 A) so andeuten:

$$s\ [\mathsf{A}_1] \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} \sigma\ [A\,(B_1)] \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} \sigma_1\ [\mathsf{B}] \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} s_1.$$

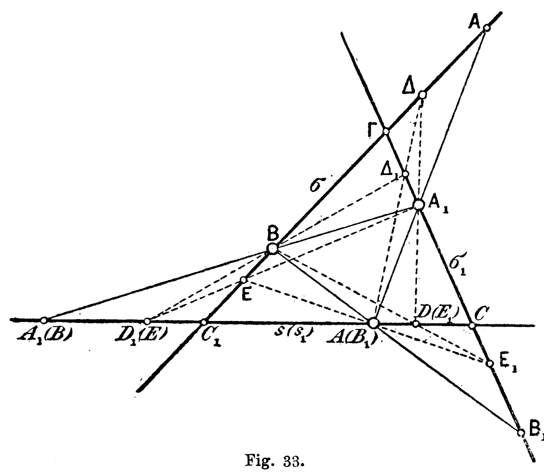

Fig. 33.

Bezeichnen wir noch den Punkt, in dem σ von $A\,(B_1)\,\mathsf{A}_1$ geschnitten wird, durch A und den Punkt, in dem σ_1 von $A\,(B_1)\,\mathsf{B}$ geschnitten wird, durch B_1, so können wir die vorstehende Kette auch so schreiben:

$$A\,B\,C\,[\mathsf{A}_1] \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} \mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma\,[A\,(B_1)] \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} \mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,\Gamma\,[\mathsf{B}] \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} A_1\,B_1\,C_1.$$

Zu einem beliebigen Punkte D von s erhalten wir nun den homologen D_1 von s_1 durch die folgende Konstruktion: Wir projizieren D aus A_1 auf σ, den erhaltenen Punkt Δ

aus $A\,(B_1)$ auf σ_1, den erhaltenen Punkt $\mathsf{\Delta}_1$ aus B auf s_1; in Zeichen:

$$A\,B\,C\,D \,\overline{\overline{\wedge}}\, \mathsf{A\,B\,\Gamma\,\Delta} \,\overline{\overline{\wedge}}\, \mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,\mathsf{\Gamma}\,\mathsf{\Delta}_1 \,\overline{\overline{\wedge}}\, A_1\,B_1\,C_1\,D_1. —$$

Die eben angegebene Konstruktion führt uns zu einem wichtigen Lehrsatz, wenn wir jetzt wieder zum Punkte D_1, indem wir ihn zur ersten Punktreihe s rechnen und dementsprechend mit E bezeichnen, den homologen E_1 suchen: Wir projizieren also E aus A_1 auf σ, den erhaltenen Punkt E aus $A\,(B_1)$ auf σ_1, den erhaltenen Punkt E_1 aus B auf s_1, sodafs wir haben:

$$B\,A\,C_1\,E\,[\mathsf{A}_1] \,\overline{\overline{\wedge}}\, \mathsf{B\,A}\,C_1\,\mathsf{E}\,[A\,(B_1)] \,\overline{\overline{\wedge}}\, \mathsf{B}_1\,\mathsf{A}_1\,C\,\mathsf{E}_1\,[\mathsf{B}] \,\overline{\overline{\wedge}}\, A\,B\,C\,E_1.$$

Da das erste Glied $B\,A\,C_1\,E$ dieser Kette mit dem letzten Gliede $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ der vorhergehenden Kette identisch ist, so haben wir[(30$_1$)] $A\,B\,C\,D \,\overline{\wedge}\, A\,B\,C\,E_1$; folglich[(33 Z 1)] fällt E_1 in D, mit andern Worten, der Punkt $D\,(E_1)$ entspricht dem Punkt $D_1\,(E)$ zweifach. Da $D\,(E_1)$ ein beliebiger Punkt ist, so können wir das Ergebnis mit Hülfe des Begriffes der Projektivität[(37$_1$)] so aussprechen:

> *Wenn in einer geraden Projektivität* ein *Element seinem homologen zweifach entspricht, so entspricht* jedes *Element seinem homologen zweifach.*

In Zeichen: Aus

$$A\,A_1\,C\,..\,F\,...\,\overline{\wedge}\,A_1\,A\,C_1\,..\,F_1\,...$$

folgt

$$A\,A_1\,C\,C_1\,..\,F\,F_1\,...\,\overline{\wedge}\,A_1\,A\,C_1\,C\,..\,F_1\,F\,...$$

In der Zeichensprache können wir auf die doppelte Bezeichnung eines und desselben Elementes einer Projektivität verzichten, da aus der Stellung des Elementes (vor oder hinter $\overline{\wedge}$) zu erkennen ist, ob es zum ersten oder zweiten Grundgebilde zu rechnen ist.

z *Zusatz.* Auch[(36 Z)] diesen Satz können wir von dem Begriff der Projektivität loslösen, indem wir beachten, dafs nach unserer Konstruktion $s\,\sigma\,\sigma_1$ ein beliebiges Dreiseit und $A\,\mathsf{B}\,\mathsf{A}_1$ ein beliebiges diesem Dreiseit eingeschriebenes Dreieck ist und dafs wir, von dem beliebigen Punkte D ausgehend, nacheinander konstruiert haben $\mathsf{\Delta}\,\mathsf{\Delta}_1\,E\,\mathsf{E}\,\mathsf{E}_1$. Fassen wir wieder diese sechs Punkte als die Ecken eines einfachen[(16 A)] Sechsecks auf und bezeichnen sie der Reihe nach durch 1 2 3 4 5 6, so erkennen wir (Fig. 34), daſs von diesem Sechseck $s \sigma \sigma_1$ die Diagonallinien [36 Z] und $A B A_1$ die Diagonalpunkte sind.

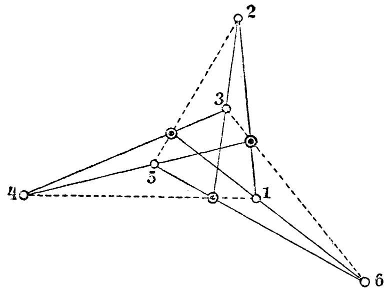

Fig. 34.

Nennen wir noch z. B. die Diagonallinie 14 und den Diagonalpunkt (23) . (56) einander zugeordnet, so können wir unsern Satz auch so aussprechen:

Zweiter Sechseckssatz. Wenn zwei Diagonalpunkte eines einfachen Sechsecks in den zugeordneten Diagonallinien liegen, so liegt auch der dritte Diagonalpunkt in der zugeordneten Diagonallinie.

Zweiter Sechsseitssatz. Wenn zwei Diagonallinien eines einfachen Sechsseits durch die zugeordneten Diagonalpunkte gehen, so geht auch die dritte Diagonallinie durch den zugeordneten Diagonalpunkt.

39. **Projektive Permutationen.** Es ist häufig bequem, 39
nicht bloſs, wie bisher, von perspektiven und projektiven Grundgebilden zu sprechen, sondern auch von perspektiven und projektiven Elementen. Z. B. der Satz: Die Punkte $A\,B\,C\,D\,E$ sind den Punkten $A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1$ projektiv, soll aussagen: 1. $A\,B\,C\,D\,E$ liegen in einer Gerade s und $A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1$ in einer zweiten Gerade s_1; 2. in der etwa durch $B\,C\,D \barwedge B_1\,C_1\,D_1$ bestimmten [33_2] projektiven Verwandtschaft der Punktreihen s und s_1 ist dem Punkt A der Punkt A_1 und dem Punkt E der Punkt E_1 homolog. — Da sich zwei Punktreihen immer projektiv so aufeinander beziehen lassen, daſs *drei* Punkten der einen drei Punkte der andern entsprechen, so muſs eine Gruppe mindestens *vier* Elemente enthalten, wenn die Aussage, daſs die Gruppe einer andern projektiv ist, einen Inhalt haben soll. —

Lehrsatz: *Leitet man aus einer Gruppe von vier Elementen eine Permutation ab, indem man irgend zwei Elemente und gleichzeitig die beiden übrigen vertauscht, so ist die Elementengruppe ihrer Permutation projektiv.*

In Zeichen: $A\,B\,C\,D \,\overline{\wedge}\, B\,A\,D\,C \,\overline{\wedge}\, C\,D\,A\,B \,\overline{\wedge}\, D\,C\,B\,A$.

Beweis: Handelt es sich um eine Punktgruppe, so läſst sich z. B. die Richtigkeit der Behauptung $ABCD \,\overline{\wedge}\, BADC$ in folgender Weise zeigen: Wir projizieren die vier Punkte $A\,B\,C\,D$ (Fig. 35) aus einem beliebigen Punkte A_1 auf eine beliebige durch D gehende Gerade, sodaſs $A\,B\,C\,D \,\overline{\wedge}\, \mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma\,D$ ist. Bezeichnen wir noch den Punkt, in dem die Verbindungslinie $A\,\mathsf{B}$ den Projektionsstrahl $\mathsf{A}_1\,C$ schneidet, durch B_1, so haben wir

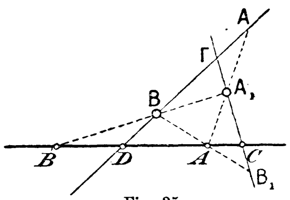

Fig. 35.

$$A\,B\,C\,D\,[\mathsf{A}_1] \,\overline{\overline{\wedge}}\, \mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma\,D\,[A] \,\overline{\overline{\wedge}}\, \mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,\Gamma\,C\,[\mathsf{B}] \,\overline{\overline{\wedge}}\, B\,A\,D\,C.$$

Z *Zusatz.* Aus $A\,B\,C\,D \,\overline{\wedge}\, A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ folgt demnach

$$A\,B\,C\,D \,\overline{\wedge}\, B_1\,A_1\,D_1\,C_1 \,\overline{\wedge}\, C_1\,D_1\,A_1\,B_1 \,\overline{\wedge}\, D_1\,C_1\,B_1\,A_1.$$

A *Anmerkung.* Dieser Satz ist mit dem vorhergehenden (38) identisch. Wir haben ihn zweimal abgeleitet und zweimal in Worte gekleidet, um je nach den Schlüssen, die wir aus ihm zu ziehen haben, bald die eine bald die andere Form anwenden zu können.

40 40. **Projektive Verwandtschaft harmonischer Würfe.** Haben zwei harmonische Punktwürfe $A\,B\,.\,C\,D$ und $A_1\,B_1\,.\,C_1\,D$ den Punkt D gemeinsam, so wird die Verbindungslinie $C\,C_1$ von $A\,A_1$ und $B\,B_1$ in einem und demselben Punkte geschnitten. Ist nämlich S der Schnittpunkt von $C\,C_1$ und $A\,A_1$, so muſs der Strahl $S\,B$ durch den von A_1 durch C_1 und D harmonisch getrennten Punkt gehen (21₁); das ist aber B_1 (20₂).

In derselben Weise ergiebt sich, daſs $C\,C_1$ auch von den Verbindungslinien $A\,B_1$ und $A_1\,B$ in einem und demselben Punkte geschnitten wird. Daher:

1. *Zwei harmonische Würfe, die ein Element gemeinsam haben, sind perspektiv auf einander bezogen, wenn man das gemeinsame Element sich selbst, und die diesem zugeordneten Elemente einander, zuweist. Die weitere Zuordnung ist beliebig.*

In Zeichen: Sind $AB.CD$ und $A_1B_1.C_1D$ zwei harmonische Punktwürfe, so gehen durch einen Punkt

1. CC_1; AA_1; BB_1 und
2. CC_1; AB_1; A_1B. —

In Zeichen: Sind $ab.cd$ und $a_1b_1.c_1d$ zwei harmonische Strahlenwürfe, so liegen in einer Gerade

1. cc_1; aa_1; bb_1 und
2. cc_1; ab_1; a_1b. —

Aus dem vorstehenden Lehrsatz folgt, daſs wir zwei beliebige harmonische Punktwürfe immer als die Endglieder einer perspektiven Kette ansehen können. Verbinden wir nämlich einen beliebigen Punkt des einen Wurfs mit einem beliebigen des andern, z. B. A mit D_1, nehmen auf dieser Verbindungslinie einen Punkt B willkürlich an und zeichnen den von D_1 durch A und B harmonisch getrennten Punkt Γ, so haben wir nach dem eben bewiesenen Satze z. B.

$$ABCD \overline{\overline{\wedge}} A\,\mathsf{B}\,D_1\,\Gamma \overline{\overline{\wedge}} B_1A_1D_1C_1.$$

Im ganzen erhält man acht verschiedene Arten der Zuordnung. Dabei ist zu beachten, daſs zwei Elementen, die ein Paar bilden, immer zwei Elemente zugewiesen werden müssen, die wieder ein Paar bilden.

2. Zwei harmonische Würfe sind *projektiv* aufeinander bezogen, wenn man einem beliebigen Element des einen Wurfes ein beliebiges Element des andern, und gleichzeitig die diesen zugeordneten Elemente einander, zuweist. Die weitere Zuordnung ist beliebig.

In Zeichen: Sind $AB.CD$ und $A_1B_1.C_1D_1$ zwei harmonische Würfe, so ist

$$ABCD \overline{\wedge} A_1B_1C_1D_1 \overline{\wedge} B_1A_1C_1D_1 \overline{\wedge} B_1A_1D_1C_1 \text{ usw.}$$

Der vorstehende Satz läſst sich umkehren:

3. *Ist eine Gruppe von vier Elementen einer Permutation projektiv, die durch Vertauschung* nur *zweier Elemente aus ihr abgeleitet ist, so bilden die beiden vertauschten und die beiden nicht vertauschten Elemente zwei Paare eines harmonischen Wurfes.*

In Zeichen: Aus $ABCD \overline{\wedge} BACD$ folgt, daſs $AB.CD$ ein harmonischer Wurf ist.

Beweis: Projiziert man $ABCD$ aus einem beliebigen Punkt Δ auf eine durch D gelegte Gerade, sodaſs $ABCD \overline{\wedge}$ $\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,R\,D$ ist, so folgt[(30$_3$)] aus der Voraussetzung $ABCD \overline{\wedge}$

$BACD$, dafs $\mathsf{AB}RD \barwedge BACD$ ist. Folglich [34] gehen $\mathsf{A}B$, $\mathsf{B}A$, RC durch *einen* Punkt $\mathsf{\Gamma}$. Das Viereck $\Delta\,\mathsf{AB\Gamma}$ zeigt [20₁], dafs $AB\,.\,CD$ ein harmonischer Wurf ist.

41 41*. **Doppelverhältnis.** In der Geometrie des Mafses unterscheidet man zwei Strecken durch ihre Gröfse und, wenn sie in einer und derselben Gerade oder in parallelen Geraden liegen, auch durch ihre Richtung. Den Richtungssinn unterscheidet man durch das positive und negative Vorzeichen, sodafs $AB = -BA$ oder $AB + BA = 0$ ist. Sind ABX drei Punkte einer Gerade, so ist, wie auch ihre Lage sein mag, $AX + XB = AB$ oder $AX + XB + BA = 0$, vorausgesetzt, dafs man Strecken von entgegengesetzter Richtung als positive und negative Gröfsen im algebraischen Sinn auffafst.

Liegt X auf AB, so haben XA und XB entgegengesetzte Vorzeichen; liegt X auf $A\cdot B$ [5], so haben XA und XB gleiche Vorzeichen. Im ersten Fall ist daher das Verhältnis $XA : XB$, welches das *einfache* Verhältnis der drei Punkte ABX genannt und kurz durch (ABX) bezeichnet wird, negativ; im zweiten positiv.

Ist Y ein zweiter Punkt von AB, so läfst sich auch Y als Teilpunkt der Strecke AB ansehen; die Teilstrecken sind YA und YB und das Teilungsverhältnis $YA : YB$ oder (ABY). Aus den beiden Verhältnissen (ABX) und (ABY) läfst sich ein neues Verhältnis $\frac{XA}{XB} : \frac{YA}{YB}$ bilden, welches das Doppelverhältnis des Wurfes $AB\,.\,XY$ heifst und kurz durch $(ABXY)$ bezeichnet wird. —

1. Aufgabe: Eine Strecke nach einem gegebenen Verhältnis zu teilen.

Lösung: Ist das Verhältnis durch die beiden Strecken p und q gegeben, so mufs noch angegeben werden, ob das Verhältnis positiv oder negativ sein soll.

I. $\left(-\frac{p}{q}\right)$: Wir ziehen von den Endpunkten A und B der gegebenen Strecke (Fig. 36) zwei parallele und entgegengesetzt gerichtete Strecken: $AP = p$ und $BQ = q$; die Verbindungslinie PQ schneidet AB in dem gesuchten Punkte X.

II. $\left(+\frac{p}{q}\right)$: Wir ziehen von A und B zwei parallele und gleich gerichtete Strecken: $AP = p$ und $BQ_1 = q$; die Verbindungslinie PQ_1 schneidet AB in dem gesuchten Punkte Y. —

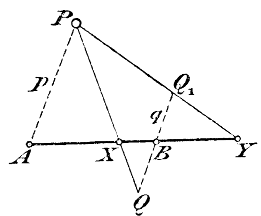

Fig. 36.

Das Doppelverhältnis der vier Punkte $A\,B\,X\,Y$ ist

$$\left(-\frac{p}{q}\right):\left(+\frac{p}{q}\right) = -1.$$

Weil B die Mitte von $Q\,Q_1$ ist, so sind, wenn wir den unendlich fernen Punkt von $Q\,Q_1$ durch U bezeichnen, $Q\,Q_1 \,.\, B\,U$ vier harmonische Punkte[27,1], die Verbindungslinien dieser Punkte mit P mithin[21,2] vier harmonische Strahlen und die vier Punkte $A\,B \,.\, X\,Y$, in denen diese vier Strahlen die Gerade $A\,B$ schneiden, vier harmonische Punkte[21,3]. Daher

2. Lehrsatz: Vier Punkte, deren Doppelverhältnis -1 ist, bilden einen harmonischen Wurf.

Von diesem Satz gilt auch die

3. Umkehrung: Das Doppelverhältnis von vier harmonischen Punkten ist -1.

Projiziert man nämlich aus einem beliebigen Punkte P die vier harmonischen Punkte $A\,B \,.\, X\,Y$ auf eine durch B parallel zum Projektionsstrahl PA gelegte Gerade, so sind $U\,B \,.\, Q\,Q_1$ vier harmonische Punkte[21,1]; und weil U der unendlich ferne Punkt von $Q\,Q_1$ ist, so ist B die Mitte[27,2]. Weil also $B\,Q = -\,B\,Q_1$ ist, so haben wir

$$\frac{XA}{XB} = \frac{AP}{BQ} = -\frac{AP}{BQ_1} = -\frac{YA}{YB},$$

folglich $(A\,B\,X\,Y) = -1$.

Aus der vorstehenden Proportion ergiebt sich ferner die Gleichung $XA \,.\, YB + XB \,.\, YA = 0$. Ist O die Mitte der Strecke AB, so dafs $OA + OB = 0$ ist, so haben wir

$$(XO + OA)(YO + OB) + (XO + OB)(YO + OA) = 0,$$

folglich

$$2XO \,.\, YO + (XO + YO)(OA + OB) + 2\,OA \,.\, OB = 0,$$

folglich $$OA^2 = OX \,.\, OY.$$

4. Sind $AB.XY$ vier harmonische Punkte und O die Mitte von AB, so ist $OA^2 = OX.OY$. —

Sind $ab.xy$ vier harmonische Strahlen des Mittelpunktes S, von denen x und y auf einander senkrecht stehen, so ist $\angle ax = xb$ (28₃). Schneiden wir diese vier Strahlen durch eine Gerade in den vier Punkten $AB.XY$ und ziehen durch B eine Parallele zu a, welche x in C schneidet, so ist $\angle BSC = CSA = SCB$, folglich $SB = BC$, wobei wir vom Vorzeichen abzusehen haben, da die Strecken in verschiedenen Geraden liegen. Da nun $SA : BC = XA : XB$ ist, so ist auch $SA : SB = XA : XB$.

5. Schneiden wir vier harmonische Strahlen $ab.xy$ des Punktes S durch eine Gerade in den Punkten $AB.XY$, so ist, wenn $x \perp y$ ist,

$$SA : SB = XA : XB = YA : YB. —$$

Projiziert man drei Punkte ABX, die in einer Gerade liegen, entweder aus einem endlichen Punkte auf eine parallele Gerade oder aus einem unendlich fernen Punkte auf eine beliebige Gerade, so folgt aus bekannten Sätzen der Proportionslehre, dafs das einfache Verhältnis $(ABX) = (A_1 B_1 X_1)$ ist, also durch die Projektion nicht geändert wird. Würde man dagegen die drei Punkte aus einem endlichen Punkte auf eine endliche Gerade projizieren, so würde das einfache Verhältnis sich ändern.

Nimmt man aber noch einen vierten Punkt Y hinzu, so bleibt das Doppelverhältnis $(ABXY)$, wie wir beweisen wollen, bei jeder Projektion konstant. Bleibt es bei *einer* Projektion konstant, so bleibt es auch bei mehreren aufeinander folgenden konstant, so dafs wir unsern Lehrsatz so aussprechen können (30₁):

6. *Zwei projektive Gruppen von vier Punkten haben dasselbe Doppelverhältnis.*

Beweis: Projizieren wir die vier Punkte $ABXY$ der Gerade s aus einem beliebigen Punkte S auf irgend eine Gerade s_1, so ist zu zeigen, dafs die Doppelverhältnisse $(ABXY)$ und $(A_1 B_1 X_1 Y_1)$ einander gleich sind. — Ziehen wir durch B (Fig. 37) eine Parallele zum Projektionsstrahl SA, welche SX und SY in U und V schneidet, so ist $(ABXY) = (VUB)$; denn

$$\frac{XA}{XB} = \frac{AS}{BU} \text{ und } \frac{YA}{YB} = \frac{AS}{BV},$$

folglich durch Division

$$\frac{XA}{XB} : \frac{YA}{YB} = \frac{BV}{BU}.$$

Ziehen wir ebenso durch B_1 eine Parallele zu SA, so ergiebt sich bei entsprechender Bezeichnung $(A_1 B_1 X_1 Y_1) = (V_1 U_1 B_1)$. Da aber $(V_1 U_1 B_1)$ die Projektion des einfachen Verhältnisses (VUB) auf eine parallele Gerade ist, so ist, wie schon erwähnt, nach einem bekannten Satz der Proportionslehre $(VUB) = (V_1 U_1 B_1)$, also auch $(ABXY) = (A_1 B_1 X_1 Y_1)$. — Gilt aber der Satz für perspektive Gruppen, so gilt er auch (30,1) für projektive Gruppen. —

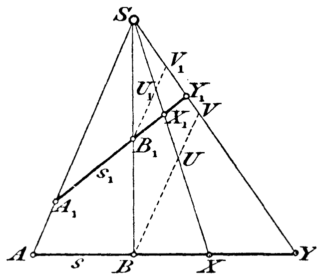

Fig. 37.

Auf indirektem Wege beweist man den

7. Lehrsatz: Wenn zwei Gruppen von vier Punkten, die einen Punkt entsprechend gemein haben, dasselbe Doppelverhältnis haben, so liegen sie perspektiv. —

Mit Hülfe dieses Satzes läfst sich ferner zeigen: Wenn $(ABXY) = (A_1 B_1 X_1 Y_1)$ ist, so ist $ABXY \barwedge A_1 B_1 X_1 Y_1$. Man braucht nur die Hülfslinie $A Y_1$ zu ziehen und zweimal den vorhergehenden Satz anzuwenden, um einzusehen, dafs $ABXY$ und $A_1 B_1 X_1 Y_1$ perspektiv zu der in $A Y_1$ konstruierten Punktgruppe liegen, also untereinander projektiv sind (30,1):

8. Zwei Gruppen von vier Punkten sind projektiv, wenn sie dasselbe Doppelverhältnis haben. —

Ist $AB = A_1 B_1$, $AX = A_1 X_1$, $AY = A_1 Y_1$, so ist auch $(ABXY) = (A_1 B_1 X_1 Y_1)$; daher:

9. Zwei kongruente Punktgruppen sind projektiv.

Daraus ergiebt sich weiter:

10. Zwei kongruente Strahlengruppen sind projektiv.

Ist nämlich $\angle ab = a_1 b_1$, $\angle ax = a_1 x_1$, $\angle ay = a_1 y_1$, so können wir zwei zu den Strahlengruppen perspektive und unter einander kongruente Punktgruppen zeichnen: Wählen wir in a und a_1 zwei Punkte A und A_1 so, dafs $SA = S_1 A_1$ ist, und errichten in A auf a das Lot s und in A_1 auf a_1 das Lot s_1, so werden s und s_1 von den kongruenten Strahlengruppen in kongruenten Punktgruppen geschnitten. —

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen folgt:

11. Zwei kongruente Grundgebilde sind projektiv (vgl. 164 Z).

A *Anmerkung.* Durch die Lehre vom Doppelverhältnis hat Steiner 1832 in seinem Werke: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ die Geometrie der Lage begründet.

---

§ 4. Krumme Grundgebilde.

42 42. **Erzeugnis zweier projektiven Grundgebilde.** Aus den projektiven Grundgebilden, deren Konstruktion im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, ergeben sich neue Gebilde, zu deren Untersuchung wir uns jetzt wenden. Für diese Erzeugnisse projektiver Grundgebilde geben wir die folgende

Definition: *Der Inbegriff der Punkte, in denen sich die homologen Strahlen zweier projektiven geraden Strahlenbüschel schneiden, heifst eine krumme Punktreihe oder eine Kurve zweiter Ordnung.*

Definition: *Der Inbegriff der Geraden, die die homologen Punkte zweier projektiven geraden Punktreihen verbinden, heifst ein krummer Strahlenbüschel oder ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung.*

Z *Zusatz.** Verbindet man zwei beliebige Punkte S und S_1 der Peripherie eines Kreises mit irgend einem Punkte A der Peripherie durch die Strahlen a und a_1, mit B durch b und b_1 u. s. w., so ist nach bekannten Sätzen der Planimetrie $\angle ab = a_1 b_1$ u. s. w. Wir erhalten also in S und S_1 zwei kongruente Strahlenbüschel (vgl. 13); da diese projektiv sind$^{(41_{11})}$, so können wir die Punkte eines Kreises auffassen als die Schnittpunkte homologer Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel, mit andern Worten:

Der Kreis ist eine Kurve zweiter Ordnung.

43.* **Kegelschnitt.** Es soll jetzt gezeigt werden, dafs auch die Linie, in welcher ein Kreiskegel von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, aufgefafst werden kann als der Inbegriff der Punkte, in denen sich die homologen Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel schneiden, dafs also der *Kegelschnitt* eine Kurve zweiter Ordnung ist. 43

Ist δ eine zur Achse des Kegels senkrechte Ebene, die den Kegel in einem Kreise schneidet, so lassen sich, wie wir in Nr. 42 Z gesehen haben, zwei beliebige Punkte S und S_1 dieses Kreises zu Mittelpunkten von zwei projektiven Strahlenbüscheln machen. Die Strahlen $a\,b\,c\ldots$ und $a_1\,b_1\,c_1\ldots$ dieser Büschel S und S_1 verbinden wir mit den beiden durch S und S_1 gehenden Seitenlinien s und s_1 des Kegels durch die Ebenen $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ und $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\ldots$ Schneiden diese Ebenen der Büschel s und s_1 eine beliebige Ebene ε in den Strahlenbüscheln $a'\,b'\,c'\ldots$ und $a_1'\,b_1'\,c_1'\ldots$ mit den Mittelpunkten S' und S_1', so haben wir

$$a'\,b'\,c'\ldots \overline{\overline{\wedge}}\, \alpha\,\beta\,\gamma\ldots \overline{\overline{\wedge}}\, a\,b\,c\ldots \overline{\wedge}\, a_1\,b_1\,c_1\ldots \overline{\overline{\wedge}}\, \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\ldots \overline{\overline{\wedge}}\, a_1'\,b_1'\,c_1'\ldots$$

Da demnach[30₃] $a'\,b'\,c'\ldots \overline{\wedge}\, a_1'\,b_1'\,c_1'\ldots$ ist, so stellen sich die Punkte der Linie, in welcher die Ebene ε den Kreiskegel schneidet, als Schnittpunkte der homologen Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel dar.

44. **Erzeugnis zweier perspektiven Grundgebilde.** 44
Weil die perspektive Verwandtschaft ein besonderer Fall der projektiven ist[30₂], so sind die Erzeugnisse perspektiver Gebilde aufzufassen als besondere Fälle der krummen Punktreihen und Strahlenbüschel[42]. Da nun die Schnittpunkte homologer Strahlen zweier perspektiven Büschel S und S_1 in einer Gerade s liegen[7]; da ferner[8] der Strahl $S\,S_1 = t$ mit seinem homologen $S_1\,S = t_1$ zusammenfällt, also jeder Punkt von $t\,(t_1)$ als gemeinsamer Punkt zweier homologen Strahlen aufzufassen ist, so liegen die Schnittpunkte homologer Strahlen zweier perspektiven Büschel S und S_1 in zwei Geraden s und t. Daher:

Die Punktreihe zweiter Ordnung, die von zwei perspektiven Strahlenbüscheln erzeugt wird, zerfällt in zwei Punktreihen erster Ordnung.

Der Strahlenbüschel zweiter Ordnung, der von zwei perspektiven Punktreihen erzeugt wird, zerfällt in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung.

45 45. **Tangenten und Berührungspunkte.** Sind S und S_1 die Mittelpunkte zweier projektiven Strahlenbüschel, die nicht zugleich perspektiv sind, in denen also (34) der Strahl $S\,S_1 = t$ nicht mit seinem homologen t_1 zusammenfällt, so sind S und S_1 zwei Punkte der erzeugten Kurve; denn in ihnen schneiden sich zwei homologe Strahlen, in S_1 z. B. t und t_1.

Auf jedem Strahl a_1 des Büschels S_1 liegt aufser S_1 noch ein zweiter Punkt der Kurve: der Punkt A, in dem der Strahl a_1 von seinem homologen a geschnitten wird. Nur beim Strahl t_1, der der Verbindungslinie $S\ S_1 = t$ entspricht, fällt dieser zweite Schnittpunkt mit S_1 zusammen; der Strahl t_1, der nur einen Punkt mit der Kurve gemein hat, heifst eine *Tangente.*

Bezeichnen wir $S_1\,S$ als Strahl des zweiten Büschels durch u_1, so ergiebt sich in derselben Weise, dafs der homologe Strahl u Tangente in S ist.

Die Strahlen, welche der Verbindungslinie der Mittelpunkte entsprechen, heifsen *Tangenten* der krummen Punktreihe.

Die Punkte, welche dem Schnittpunkte der Träger entsprechen, heifsen *Berührungspunkte* des krummen Strahlenbüschels.

46 46. **Erste Konstruktion der Kurve.** Die hier folgenden drei Kurvenkonstruktionen sind nichts als eine Wiederholung der in Nr. 31 gegebenen Konstruktionen projektiver Grundgebilde. —

Aufgabe: *Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, von der fünf Punkte gegeben sind.*

In Zeichen: $S\,S_1$ A B Γ.

Aufgabe: *Einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung zu zeichnen, von dem fünf Strahlen gegeben sind.*

In Zeichen: $\sigma\,\sigma_1\,\alpha\,\beta\,\gamma$.

Lösung: Die fünf gegebenen Punkte seien $S\,S_1$ A B Γ. Wir ziehen nach A B Γ aus S und S_1 die Strahlen $a\,b\,c$ und $a_1\,b_1\,c_1$ und beziehen die Strahlenbüschel S und S_1 projektiv so aufeinander, dafs den Strahlen $a\,b\,c$ die Strahlen $a_1\,b_1\,c_1$ entsprechen (31, Allgemeine Lösung). Wir legen also (Fig. 38) durch A zwei beliebige Strahlen s und s_1, welche $b\,c$ und $b_1\,c_1$ in $B\,C$ und $B_1\,C_1$ schneiden, sodafs $\mathsf{A}\,B\,C \,\overline{\overline{\wedge}}\, \mathsf{A}\,B_1\,C_1$ werden mufs; den Schnittpunkt von $B\,B_1 = \beta$ und $C\,C_1 = \gamma$ bezeichnen wir durch Σ.

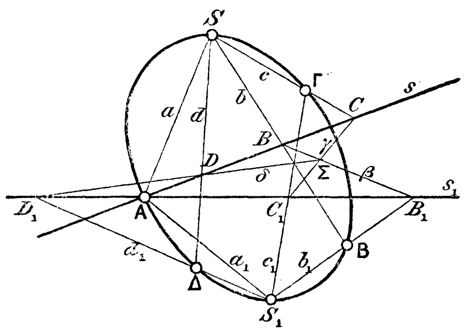

Fig. 38.

Einem beliebigen vierten Strahle d von S ordnen wir einen Strahl von S_1 durch folgende Konstruktion zu: Den Punkt D, in welchem d die Hülfslinie s schneidet, verbinden wir mit Σ und den Punkt D_1, in welchem diese Verbindungslinie δ die Hülfslinie s_1 schneidet, verbinden wir mit S_1 durch $S_1\,D_1 = d_1$. Der Schnittpunkt $\Delta = d\,d_1$ ist ein sechster Punkt der Kurve. — Auf die angegebene Weise sind soviel Punkte zu zeichnen, dafs der Lauf der Kurve erkennbar ist.

Zusatz. Da die projektive Verwandtschaft der Strahlen- z
büschel S und S_1 durch drei Strahlenpaare bestimmt ist $^{(33_2)}$, so erhalten wir dieselbe Kurve, wenn wir an die Stelle des Punktes A (durch den wir die Hülfsgeraden s und s_1 legten) einen beliebigen andern Punkt der Kurve setzen, mit andern Worten:

A ist ein *beliebiger* Punkt der Kurve.

47. **Zweite Konstruktion der Kurve.** Die vorhergehende 47
Konstruktion $^{(46)}$ wird einfacher, wenn wir als Hülfslinien s und s_1 nicht zwei beliebige durch A gehende Geraden nehmen, sondern die Verbindungslinien $\mathsf{A}\,\mathsf{B}$ und $\mathsf{A}\,\Gamma$ $^{(31_1)}$; es fallen dann die Punkte $B\,\mathsf{B}$ (Fig. 39) und $C_1\,\Gamma$ und folglich die Linien $\beta\,b_1$ und $\gamma\,c$ zusammen.

z *Zusatz.* Führen wir die Konstruktion aus, so ergiebt sich aus der Figur eine wichtige Eigenschaft des gezeichneten Kurvensechsecks: Die drei Punkte $\Sigma\, D_1\, D$, welche in der Gerade δ liegen, lassen sich auffassen als die Diagonalpunkte (36 Z) des einfachen Sechsecks

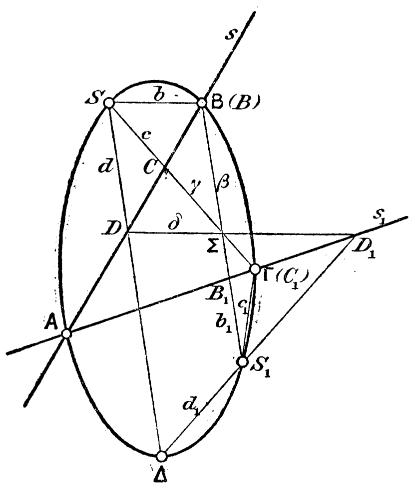

Fig. 39.

$$S\ \Gamma\ \mathsf{A}\ \mathsf{B}\ S_1\ \Delta.$$

Die Diagonalpunkte dieses Kurvensechsecks liegen also in einer Gerade (54).

Anmerkung. Um sich mit den wichtigsten Konstruktionen vertraut zu machen, ist es weit zweckmäſsiger, selbständige Zeichnungen auszuführen, als die Figuren des Textes zu verfolgen. Um auf solche Übungen hinzuweisen, werden wir an geeigneten Stellen einige Aufgaben in Buchstaben andeuten, wobei wir unendlich ferne Elemente durch den Index ∞ kenntlich machen:

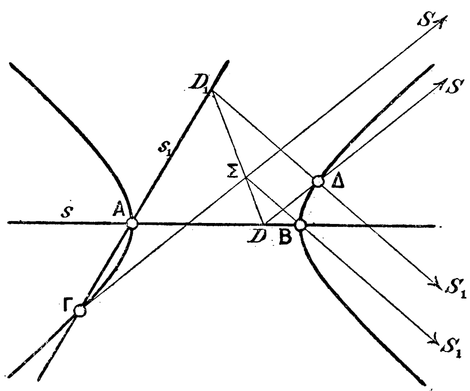

Fig. 40.

Zur Übung: $S S_1 \mathsf{A B \Gamma}_\infty$; $S S_1 \mathsf{A B}_\infty \mathsf{\Gamma}_\infty$; $S S_1 \mathsf{A}_\infty \mathsf{B \Gamma}$; $S_\infty S_1 \mathsf{A B \Gamma}$; $S_\infty S_{1\infty} \mathsf{A B \Gamma}$ (Fig. 40); $S_\infty S_1 \mathsf{A}_\infty \mathsf{B \Gamma}$.

48. **Dritte Konstruktion der Kurve.** Wir fügen noch eine dritte Lösung, *die für uns wichtigste*, hinzu, indem wir die Hülfsgeraden s_1 und s mit $\mathsf{A} S$ und $\mathsf{A} S_1$ zusammenfallen lassen $^{(31_2)}$. 48

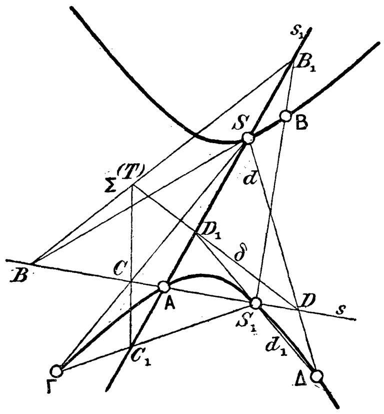

Fig. 41.

Wir ziehen also nach $\mathsf{A B \Gamma}$ (Fig. 41) aus S die drei Strahlen, die $s = \mathsf{A} S_1$ in $\mathsf{A} B C$, und aus S_1 die drei Strahlen, die $s_1 = \mathsf{A} S$ in $\mathsf{A} B_1 C_1$ schneiden, und bestimmen den Schnittpunkt Σ von $B B_1$ und $C C_1$. — Zu einem beliebigen Strahl d von S erhalten wir den zugeordneten d_1 von S_1, indem wir den Schnittpunkt $s d = D$ mit Σ durch δ und den Schnittpunkt $s_1 \delta = D_1$ mit S_1 verbinden.

1. *Zusatz.* Da B und B_1, wie ein Blick in die Figur lehrt, zwei Diagonalpunkte des Kurvenvierecks $S S_1 \mathsf{A B}$ und C und C_1 zwei Diagonalpunkte des Kurvenvierecks $S S_1 \mathsf{A \Gamma}$ sind, so läfst sich die vorstehende Konstruktion auch so beschreiben: z

Aus den fünf gegebenen Punkten bilden wir die beiden Vierecke $S S_1 \mathsf{A B}$ und $S S_1 \mathsf{A \Gamma}$ und zeichnen in jedem Viereck die Diagonallinie, welche der Seite $S S_1$ zugeordnet ist $^{(16\,Z)}$; *der Schnittpunkt dieser beiden Diagonallinien ist der Punkt Σ. Wir erhalten einen neuen Kurvenpunkt Δ, indem wir zwei Punkte D und D_1 in den Seiten $\mathsf{A} S_1$ und $\mathsf{A} S$ des Dreiecks $\mathsf{A} S S_1$, die mit Σ in einer Gerade liegen, aus S und S_1 projizieren.*

2. *Zusatz.* Diese Lösung ist die fruchtbarste, weil bei ihr der Punkt Σ eine wichtige geometrische Bedeutung gewinnt. Um diese zu erkennen, ziehen wir den (in der Figur nicht gezeichneten) Strahl $S S_1 = m$ und suchen den homologen m_1 von S_1. Dazu müssen wir den Schnittpunkt $s m$, d. i. S_1, mit Σ durch μ und den Schnittpunkt $s_1 \mu$ mit S_1 verbinden. z

Wir sehen, dafs $S_1\ \Sigma = m_1$ der dem Strahl $S\ S_1 = m$ homologe ist. Nach Nr. 45 ist aber der Strahl von S_1, welcher der Verbindungslinie der Strahlenmittelpunkte entspricht, eine Tangente. — Da aus denselben Gründen $S\ \Sigma$ die Tangente in S ist, so ist Σ der Schnittpunkt der Tangenten in S und S_1. Um uns immer an diese geometrische Bedeutung zu erinnern, wollen wir an die Stelle des Buchstaben Σ von jetzt an T setzen.

49 49. **Bestimmungsstücke einer krummen Punktreihe.** Bisher haben wir stets S und S_1 zu Mittelpunkten der die Kurve erzeugenden Strahlenbüschel gemacht; es fragt sich nun, ob wir dieselbe Kurve erhalten oder eine andere, wenn wir etwa S und A zu Mittelpunkten von Strahlenbüscheln machen und diese vermittelst der drei Punkte $S_1\ \mathsf{B}\ \Gamma$ projektiv auf-

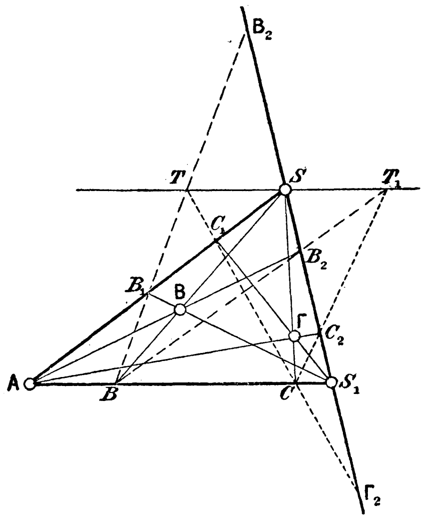

Fig. 42.

einander beziehen. Um diese Frage zu beantworten, verfolgen wir die dritte Konstruktion(48 Z 1), indem wir ausgehen das erste Mal von S und S_1, das zweite Mal von S und A. Wir zeichnen also (Fig. 42) die der Seite $S\ S_1$ zugeordneten (16 Z) Diagonallinien $B\ B_1$ und $C\ C_1$ der Vierecke $S\ S_1\ \mathsf{A}\ \mathsf{B}$ und $S\ S_1\ \mathsf{A}\ \Gamma$ und erhalten dadurch für die erste

Kurve den Schnittpunkt T[48 Z 2] der Tangenten in S und S_1; ebenso erhalten wir durch die der Seite $S\mathrm{A}$ zugeordneten Diagonallinien BB_2 und CC_2 den Schnittpunkt T_1 der Tangenten in S und A für die zweite Kurve. Bezeichnen wir noch die Punkte, in denen SS_1 von BB_1 und CC_1 geschnitten wird, durch B_2 und Γ_2, so folgt[24₃]

aus Viereck $SS_1\mathrm{A}\mathrm{B}$: $SS_1 . B_2\mathrm{B}_2$ ein harmonischer Wurf;
aus Viereck $SS_1\mathrm{A}\Gamma$: $SS_1 . C_2\Gamma_2$ ein harmonischer Wurf;

folglich $SS_1B_2\mathrm{B}_2 \barwedge SS_1C_2\Gamma_2$[40₂]. Durch Projektion dieser Punktgruppen aus B und C erhalten wir zwei projektive[30₁] Strahlengruppen $B(SS_1B_2\mathrm{B}_2) \barwedge C(SS_1C_2\Gamma_2)$, die in perspektiver[34] Lage sind, weil sie den Strahl $BC(S_1)$ entsprechend gemein haben; die Schnittpunkte $S\,T\,T_1$ der drei übrigen Strahlenpaare liegen mithin in einer Gerade, und der Punkt T ist von T_1 durch S und $\mathrm{A}S_1$[11 Z] harmonisch getrennt, weil z. B. die Gegenseiten des Vierecks $SS_1\mathrm{A}\mathrm{B}$, die sich im Diagonalpunkt B schneiden, durch die beiden andern Diagonalpunkte B_1 und B_2 harmonisch getrennt werden[24₂]. *Die Punkte T und T_1 liegen also mit S in einer Gerade und werden durch S und $\mathrm{A}S_1$ harmonisch getrennt.*

Mit Hülfe dieses Ergebnisses läfst sich nun zeigen, dafs jeder Punkt der ersten Kurve auch ein Punkt der zweiten Kurve ist. Wir zeichnen einen beliebigen Punkt Δ (Fig. 43) der ersten Kurve, indem wir die Punkte D und D_1 in den Seiten $\mathrm{A}S_1$ und $\mathrm{A}S$ des Dreiecks $\mathrm{A}SS_1$, die mit T in einer Gerade liegen, aus S und S_1 projizieren[48 Z 1]. Von dem gezeichneten Kurvenviereck $SS_1\mathrm{A}\Delta$ sind D und D_1 zwei Diagonalpunkte; der dritte, der Schnittpunkt von SS_1 und $\mathrm{A}\Delta$, heifse D_2. Dann mufs, weil die beiden Diagonalpunkte D_1 und D_2 durch die Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes harmonisch getrennt werden[24₂], DD_2 durch den von T durch S und $\mathrm{A}S_1$ harmonisch getrennten Punkt gehen, das ist[20₂] T_1. Benutzen wir nun den Strahl T_1DD_2, um einen Punkt der zweiten Kurve zu zeichnen, so haben wir[48 Z] D und D_2 aus S und A zu projizieren; dadurch aber erhalten wir Δ. —

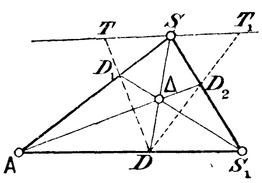

Fig. 43.

Da wir in dieser Weise weiter schliefsen können, dafs die von den Strahlenbüscheln S und A erzeugte Kurve dieselbe ist wie die von den Strahlenbüscheln A und B erzeugte, so ist bewiesen, dafs die Punkte S und S_1 ersetzt werden können durch irgend[46 Z] zwei andere Punkte, mit andern Worten, dafs S und S_1 zwei *beliebige* Punkte der Kurve sind, *dass mithin alle Eigenschaften, die von S (oder S_1) gelten, von jedem Punkte der Kurve gelten.*

Das Ergebnis, dafs sich durch fünf Punkte nur eine Kurve legen läfst, drücken wir so aus:

Eine Punktreihe zweiter Ordnung ist durch fünf Punkte bestimmt.

Ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung ist durch fünf Strahlen bestimmt.

Z *Zusatz.* Alle Stücke, die die projektive Verwandtschaft zweier Strahlenbüschel S und S_1 bestimmen, bestimmen auch eine Kurve zweiter Ordnung[42]. Die projektive Verwandtschaft von S und S_1 ist nun nicht allein durch drei Punkte $\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma$ bestimmt, sondern auch durch zwei Punkte A und B und den Strahl σ von S, der dem Strahl $S_1 S$ von S_1 entspricht, und ferner durch einen Punkt A und die Strahlen σ und σ_1, welche der Verbindungslinie $S S_1$ in S und S_1 entsprechen. Da σ und σ_1 die Tangenten[45] der durch die projektive Verwandtschaft erzeugten Kurve sind, so haben wir:

Eine Kurve zweiter Ordnung ist bestimmt sowohl durch vier Punkte und die Tangente in dem einen dieser Punkte als auch durch drei Punkte und die Tangenten in zweien dieser Punkte.

Ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung ist bestimmt sowohl durch vier Strahlen und den Berührungspunkt des einen dieser Strahlen als auch durch drei Strahlen und die Berührungspunkte von zweien dieser Strahlen.

50 50. **Projektive Strahlenbüschel in zwei Kurvenpunkten.** Noch ein weiterer wichtiger Satz ist in Nr. 49 bewiesen. Zeichnen wir sämtliche Kurvenpunkte Δ, indem wir (Fig. 43) den Punkt D die Dreiecksseite $\mathsf{A}\,S_1$ durchlaufen lassen, so haben wir[37 A]:

$$\mathsf{A}(\Delta) \doublebarwedge D_2[T_1] \doublebarwedge D \doublebarwedge S(\Delta).$$

Ordnet man also dem Strahle von S, welcher durch den Kurvenpunkt Δ geht, den Strahl von A zu, der ebenfalls durch Δ geht, so sind die Strahlenbüschel $S(\Delta)$ und $\mathsf{A}(\Delta)$

projektiv auf einander bezogen. Da wir in derselben Weise weiter schliefsen können, dafs A (Δ) $\barwedge$ B (Δ) ist, so haben wir:

Eine Punktreihe zweiter Ordnung wird aus zwei beliebigen ihrer Punkte durch zwei projektive Strahlenbüschel projiziert.

Ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung schneidet zwei beliebige seiner Strahlen in zwei projektiven Punktreihen.

Zusatz. Die vorstehende Fassung unsers Satzes ist z noch mangelhaft. Unter den Punkten der Kurve, die wir z. B. aus A projizieren sollen, ist auch der Punkt A; einen Punkt aber kann man nicht aus sich selbst projizieren, da eine Gerade erst durch zwei Punkte bestimmt ist. Wir müssen also zu unserm Beweise zurückkehren, um zu finden, welcher Strahl von A dem Strahl S (Δ) entspricht für den Fall, dafs Δ in A fällt. Δ fällt aber in A (Fig. 43), wenn D (und D_1) in A und folglich D_2 in den Schnittpunkt von A T_1 und $S\,S_1$ fällt. Da dann der Strahl A Δ D_2 durch T_1 geht, mithin die Tangente in A ist, so haben wir der obigen Fassung unsers Satzes noch hinzuzufügen:

Der Strahl, welcher einen Kurvenpunkt aus sich selbst projiziert, ist seine Tangente.

Der Punkt, in dem ein Strahl eines Büschels sich selbst schneidet, ist sein Berührungspunkt.

51. **Harmonische Trennung von Ecke und Gegenseite eines Kurvendreiecks.** Wir haben noch nicht den 51 ganzen Inhalt des in Nr. 49 gegebenen Beweises in Worte gekleidet. Allein die Thatsache, dafs die zur Konstruktion der Kurve benutzten Punkte $S\,S_1 \ldots$ *beliebig* sind, wird uns in den nächsten Nummern eine Fülle von Sätzen liefern, da wir Eigenschaften, die wir für einzelne dieser Punkte abgeleitet haben, nunmehr als allgemein gültig aussprechen können.

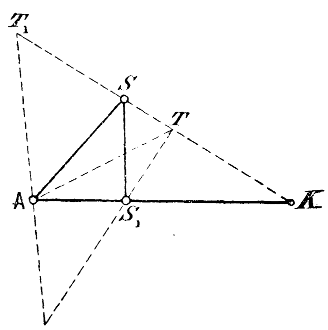

Fig. 44.

Zunächst kleiden wir das Ergebnis (49) in Worte, dafs S von A S_1 durch T und T_1 harmonisch getrennt wird. Da $S\;T\;T_1$ die Tangente in S ist, A $S\,S_1$ aber ein beliebiges Kurvendreieck, so schneidet

AS_1 die Tangente der Gegenecke S in einem Punkte K (Fig. 44), der von S harmonisch getrennt wird durch die Punkte T und T_1, in denen die Tangente in S von den Tangenten der beiden anderen Ecken S_1 und A geschnitten wird. — Nennen wir das von den Tangenten in drei Kurvenpunkten gebildete Dreiseit ein Kurvendreiseit, ferner (dual, 7) das von drei Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung gebildete Dreiseit kurz ein Büscheldreiseit und das von ihren Berührungspunkten gebildete Dreieck ein Büscheldreieck, so haben wir:

1. *Jede Seite eines Kurvendreiecks schneidet die Tangente der Gegenecke in einem Punkte, der von dieser Gegenecke durch die Tangenten der beiden andern Ecken harmonisch getrennt wird.* —

1. *Jede Ecke eines Büscheldreiseits wird aus dem Berührungspunkte der Gegenseite durch einen Strahl projiziert, der von dieser Gegenseite durch die Berührungspunkte der beiden andern Seiten harmonisch getrennt wird.* —

Da AT_1 die Tangente in A ist, so können wir die Thatsache, daſs die vier von A (Fig. 44) ausgehenden Strahlen A$(T_1\ T\,.\,S\ K)$ einen harmonischen Wurf bilden[(21$_2$)], so aussprechen:

2. *Jede Seite eines Kurvendreiseits wird von dem Strahl, der ihren Berührungspunkt mit der Gegenecke verbindet, durch die Berührungspunkte der beiden andern Seiten harmonisch getrennt.*

2. *Jede Ecke eines Büscheldreiecks wird von dem Punkte, in dem ihre Tangente von der Gegenseite geschnitten wird, durch die Tangenten der beiden andern Ecken harmonisch getrennt.*

52 **52. Schnittpunkte einer Gerade mit der Kurve.** Schneidet eine beliebige Gerade p die Kurve in einem Punkte A, so können wir[(50)] A zum Mittelpunkt des einen von zwei die Kurve erzeugenden Strahlenbüscheln machen; jeder Strahl von A, also auch p, geht daher (vgl. 45) auſser durch A noch durch einen zweiten Kurvenpunkt, durch den Punkt nämlich, in dem er von dem homologen Strahl des zweiten Büschels geschnitten wird. — Um den besondern Fall, daſs der homologe Strahl des zweiten Büschels durch A geht, unsere Gerade p also[(45)] eine Tangente ist, nicht gesondert in Worte kleiden zu müssen, sagen wir von einer Tangente,

dafs sie die Kurve in zwei (in den Berührungspunkt zusammenfallenden) Punkten schneidet (vgl. 50 Z).

Auf jedem Strahl eines Kurvenpunktes liegt noch ein zweiter Kurvenpunkt.

Durch jeden Punkt eines Strahles geht noch ein zweiter Strahl des Büschels zweiter Ordnung.

53. **Tangenten und Diagonallinie.** In Nr. 48 Z sahen 53
wir, dafs die der Seite $S S_1$ zugeordnete Diagonallinie des Vierecks $S S_1 \mathsf{A} \mathsf{B}$ durch den Schnittpunkt der Tangenten von S und S_1 geht. Dieser Satz gilt, wie wir nunmehr[49] wissen, für jedes Kurvenviereck; daher:

Die Tangenten zweier Ecken eines Kurvenvierecks schneiden sich in einem Punkte derjenigen Diagonallinie, die der durch die beiden Ecken bestimmten Vierecksseite zugeordnet[16 Z] *ist.*

Die Berührungspunkte zweier Seiten eines Büschelvierseits liegen in einem Strahle desjenigen Diagonalpunktes, welcher der durch die beiden Seiten bestimmten Vierseitsecke zugeordnet[16 Z] *ist.*

54. **Pascal und Brianchon.** In Nr. 47 Z sahen 54
wir, dafs die Diagonalpunkte des Kurvensechsecks $S \Gamma \mathsf{A} \mathsf{B} S_1 \Delta$ in einer Gerade lagen. Da wir nun an die Stelle dieser sechs Punkte irgend sechs andere Punkte der Kurve setzen können[49], so haben wir (vgl. 38 Z) allgemein:

Dritter Sechseckssatz. *Die drei Diagonalpunkte*[36 Z] *jedes einfachen Kurvensechsecks liegen in einer Gerade.* (Pascalsche Gerade.)

Dritter Sechsseitssatz. *Die drei Diagonallinien jedes einfachen Büschelsechsseits gehen durch einen Punkt.* (Brianchonscher Punkt.)

Anmerkung. Dieser (linke) Lehrsatz des Pascal fafst A
unsere zweite Kurvenkonstruktion[47] aufserordentlich kurz zusammen und wird daher vielfach Anwendung finden. — Aus dem Pascalschen Sechseck kann man den Satz über das Kurvenfünfeck[55] ableiten, indem man zwei Ecken zusammenfallen läfst und an die Stelle der sie verbindenden Seite die Tangente setzt; auch die Sätze über das Viereck und Dreieck lassen sich auf diese Weise gewinnen (statt durch die in Nr. 56 und 57 gegebenen direkten Konstruktionen). In allen diesen Fällen wendet man den Pascal am bequemsten

an, indem man die sechs Ecken durch Ziffern, und zwar je zwei zusammenfallende Ecken durch zwei gleiche Ziffern, bezeichnet und nun aus dem Schema(36 Z) die Gegenseiten und ihre Schnittpunkte, die Diagonalpunkte, abliest und dabei als Verbindungslinie zweier zusammenfallenden Ecken die Tangente nimmt. — Zu bemerken ist noch, dafs die Reihenfolge der sechs Ecken beliebig ist und dafs es daher zu jedem Kurvensechseck mehrere (sechzig) Pascalsche Geraden giebt.

55 55. **Kurvenfünfeck.**

Aufgabe: Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, wenn vier Punkte und die Tangente in einem dieser Punkte gegeben sind.

Aufgabe: Einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung zu zeichnen, wenn vier Strahlen und der Berührungspunkt in einem dieser Strahlen gegeben sind.

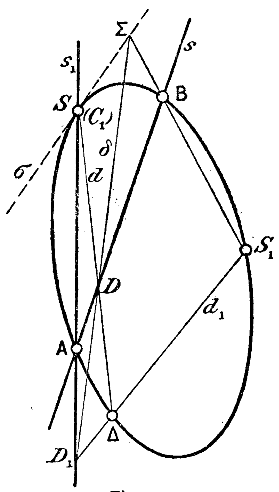

Fig. 45.

Lösung: Sind uns die vier Punkte $S\,S_1$ A B und der Strahl σ des Punktes S gegeben, so haben wir die beiden Strahlenbüschel S und S_1 projektiv so auf einander zu beziehen, dafs sich in den Punkten A und B homologe Strahlen schneiden(42) und dafs der Strahl σ von S dem Strahl $S_1\,S$ entspricht(45).

Stellen wir diese projektive Verwandtschaft durch die in Nr. 47 gegebene Konstruktion her, so erhalten wir statt des Kurvensechseckes S Γ A B S_1 Δ das Kurvenfünfeck S A B S_1 Δ (Fig. 45), bei welchem die drei Punkte Σ $D\,D_1$ in einer Gerade liegen. In Worten:

Fünfeckssatz. Der Punkt, in dem eine Seite eines einfachen Kurvenfünfecks die Tangente der gegenüberliegenden Ecke schneidet, und die beiden Schnittpunkte

Fünfseitssatz. Die Gerade, welche eine Ecke eines einfachen Büschelfünfseits mit dem Berührungspunkt der gegenüberliegenden Seite verbindet, und die beiden Vervon je zwei unter den übrigen vier Seiten, die nicht aufeinander folgen, liegen in einer Gerade.

bindungslinien von je zwei unter den übrigen vier Ecken, die nicht auf einander folgen, gehen durch einen Punkt.

Man findet[54 A] die Pascalsche Gerade des Fünfecks aus dem Schema 1 1 2 3 4 5.

Zur Übung[47 A]: $S\ S_1\ \mathsf{A}_\infty\ \mathsf{B}\ \sigma$; $S\ S_1\ \mathsf{A}_\infty\ \mathsf{B}_\infty\ \sigma$; $S_\infty\ S_1\ \mathsf{A}\ \mathsf{B}\ \sigma$; $S_\infty\ S_1\ \mathsf{A}\ \mathsf{B}_\infty\ \sigma$; $S_\infty\ S_1\ \mathsf{A}_\infty\ \mathsf{B}\ \sigma$; $S_\infty\ S_{1\infty}\ \mathsf{A}\ \mathsf{B}\ \sigma$.

56. **Kurvenviereck.** 56

Aufgabe: Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, von der drei Punkte und die Tangenten in zweien dieser Punkte gegeben sind.

Aufgabe: Einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung zu zeichnen, von dem drei Strahlen und die Berührungspunkte in zweien dieser Strahlen gegeben sind.

Lösung: Sind uns die drei Punkte $S\,S_1\,\mathsf{A}$ und der Strahl σ des Punktes S und der Strahl σ_1 des Punktes S_1 gegeben, so haben wir die beiden Strahlenbüschel S und S_1 projektiv so aufeinander zu beziehen, dafs sich im Punkte A zwei homologe Strahlen schneiden[42] und dafs σ dem Strahl $S_1\,S$ und der Strahl $S\,S_1$ dem Strahl σ_1 entspricht[45]. Benutzen wir die in Nr. 48 gegebene Konstruktion, so erkennen wir, dafs uns der dort konstruierte Schnittpunkt der Diagonallinien, den wir[48 Z] mit dem Buchstaben T bezeichnen wollten, durch die beiden Tangenten σ und σ_1 bereits gegeben ist; dafs wir also nur die Punkte D und D_1 der Seiten $\mathsf{A}\,S_1$ und $\mathsf{A}\,S$ (Fig. 46), die mit T in einer Gerade liegen, aus S und S_1 zu projizieren haben, um neue Kurvenpunkte Δ zu erhalten.

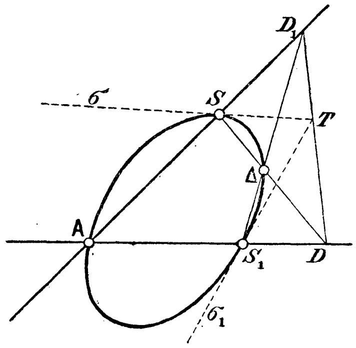

Fig. 46.

Der Vollständigkeit wegen sprechen wir auch diese

Konstruktion in Form eines Lehrsatzes aus, trotzdem das Ergebnis identisch ist mit Nr. 53. — Betrachten wir die vier Kurvenpunkte $S\ \mathsf{A}\ S_1\ \Delta$, indem wir ihnen eine bestimmte Reihenfolge beilegen, als die Ecken eines *einfachen*[16 A] Vierecks, so läfst sich die Konstruktion in Form eines Lehrsatzes so aussprechen:

Viereckssatz. Die beiden Punkte, in denen sich die Gegenseiten eines *einfachen* Kurvenvierecks schneiden, und der Punkt, in dem sich die Tangenten zweier Gegenecken schneiden, liegen in einer Gerade.

Vierseitssatz. Die beiden Geraden, die die Gegenecken eines *einfachen* Büschelvierseits verbinden, und die Gerade, welche die Berührungspunkte zweier Gegenseiten verbindet, gehen durch einen Punkt.

Man findet[54 A] die Pascalsche Gerade des Vierecks durch das Schema $1\,1\,2\,3\,3\,4$.

Z *Zusatz.* Drei Punkte $S\,S_1\,\mathsf{A}$ und die Tangenten σ und σ_1 in S und S_1 können wir darstellen durch *vier Punkte*: $S\,S_1\,\mathsf{A}$ und T, wenn wir den Schnittpunkt $\sigma\,\sigma_1$ durch T bezeichnen. Wir haben also ein Stück weniger nötig, als wenn wir die Kurve als bestimmt ansehen durch fünf Punkte[49] oder durch vier Punkte und die Tangente des einen dieser Punkte[49 Z].

Wir wollen deswegen im folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes festgesetzt wird, unter den Worten: Eine Kurve ist gegeben, immer verstehen: $S\,S_1\,\mathsf{A}$ und T sind gegeben;

und umgekehrt wollen wir die Aufgabe: Eine Kurve zu zeichnen, als gelöst ansehen, wenn wir $S\,S_1\,\mathsf{A}$ und T konstruiert haben.

Zur Übung[47 A]: $S\,S_1\,\mathsf{A}\,\sigma \parallel \sigma_1$, $S\,S_1\,\mathsf{A}_\infty\,\sigma\,\sigma_1$; $S\,S_1\,\mathsf{A}_\infty\,\sigma \parallel \sigma_1$; $S_\infty\,S_1\,\mathsf{A}\,\sigma\,\sigma_1$; $S_\infty\,S_1\,\mathsf{A}_\infty\,\sigma\,\sigma_1$; $S_\infty\,S_{1\infty}\,\mathsf{A}\,\sigma\,\sigma_1$.

57 57. **Kurvendreieck.**

Aufgabe: Von einer Kurve zweiter Ordnung sind drei Punkte und die Tangenten in zweien dieser Punkte gegeben; man soll die Tangente des dritten Punktes zeichnen.

Aufgabe: Von einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung sind drei Strahlen und die Berührungspunkte in zweien dieser Strahlen gegeben; man soll den Berührungspunkt des dritten Strahls zeichnen.

Lösung: Die Seiten AS_1 und AS (Fig. 47) des gegebenen Kurvendreiecks A$S\,S_1$ mögen die gegebenen Tangenten der Gegenecken S und S_1 in den Punkten K und K_1 schneiden. Die gesuchte Tangente des Kurvenpunktes A ist von AT durch S und S_1 harmonisch getrennt[51$_2$]. Den von AT durch S und S_1 harmonisch getrennten Strahl können wir aber vermittelst des Vierecks $S\,S_1\,K\,K_1$, von dem A und T zwei Diagonalpunkte sind, finden, indem wir den dritten Diagonalpunkt K_2, den Schnittpunkt der Gegenseiten $S\,S_1$ und $K\,K_1$, zeichnen.

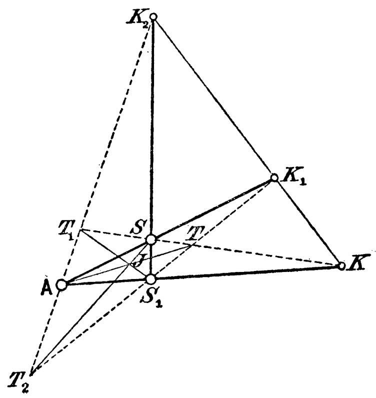

Fig. 47.

Die drei Punkte $K\,K_1\,K_2$, die nach unserer Konstruktion in einer Gerade liegen, sind die Punkte, in denen die Seiten unsers Kurvendreiecks die Tangenten der Gegenecken schneiden. Daher

Dreieckssatz: Die drei Punkte, in denen die Seiten eines Kurvendreiecks die Tangenten der Gegenecken schneiden, liegen in einer Gerade.

Dreiseitssatz: Die drei Geraden, welche die Ecken eines Büscheldreiseits mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbinden, gehen durch einen Punkt.

Die Pascalsche Gerade des Kurvendreiecks erhält man[54 A] aus dem Schema 1 1 2 2 3 3.

58. **Kurvendreiseit.** 58

Aufgabe: Von einer Kurve zweiter Ordnung sind drei Tangenten und die Berührungspunkte in zweien dieser Tangenten gegeben; man soll den Berührungspunkt der dritten Tangente zeichnen.

Aufgabe: Von einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung sind drei Berührungspunkte und die Strahlen durch zwei dieser Berührungspunkte gegeben; man soll den Strahl des dritten Berührungspunktes zeichnen.

Lösung: Die Tangenten der beiden gegebenen Punkte S und S_1 (Fig. 47) mögen von der dritten gegebenen Tangente in T_1 und T_2 geschnitten werden. Die Seite $S\,S_1$ schneidet dann die dritte Tangente $T_1\,T_2$ in einem Punkte K_2, der von der gesuchten Gegenecke A durch T_1 und T_2 [51$_1$] harmonisch getrennt ist. Den von K_2 durch T_1 und T_2 harmonisch getrennten Punkt können wir aber vermittelst des Vierecks $S\,S_1\,T_1\,T_2$, von dem T und K_2 zwei Diagonalpunkte sind, finden, indem wir den dritten Diagonalpunkt J, den Schnittpunkt von $S\,T_2$ und $S_1\,T_1$, zeichnen; die Verbindungslinie der beiden Diagonalpunkte T und J schneidet dann die Tangente $T_1\,T_2$ in dem gesuchten Berührungspunkte A[24$_3$].

Die drei Verbindungslinien $S\,T_2$, $S_1\,T_1$ und $T\,\mathsf{A}$, welche nach unserer Konstruktion durch *einen* Punkt (J) gehen, sind die Geraden, welche die Ecken des gegebenen Kurvendreiseits mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbinden. Daher

Dreiseitssatz: Die drei Geraden, welche die Ecken eines Kurvendreiseits mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbinden, gehen durch einen Punkt.	Dreieckssatz: Die drei Punkte, in denen die Seiten eines Büscheldreiecks die Tangenten der Gegenecken schneiden, liegen in einer Gerade.

Z *Zusatz.* Haben wir den Berührungspunkt der dritten Tangente gezeichnet, so können wir aus $S\,S_1\,\mathsf{A}$ und T die durch die gegebenen Stücke bestimmte Kurve zeichnen [56 Z]; die vorhergehende Konstruktion löst daher die

Aufgabe: Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, von der drei Tangenten und die Berührungspunkte in zweien dieser Tangenten gegeben sind.	Aufgabe: Einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung zu zeichnen, von dem drei Berührungspunkte und die Tangenten in zweien dieser Berührungspunkte gegeben sind.

59 59. **Kurvenviereck und zugeordnetes Kurvenvierseit.** Sind $\mathsf{\Delta\,A\,B\,\Gamma}$ (Fig. 48) vier Kurvenpunkte und δ die Tangente in $\mathsf{\Delta}$, so wissen wir [53], weil die Tangenten in $\mathsf{\Delta}$ und A sich in der der Vierecksseite $\mathsf{\Delta\,A}$ zugeordneten [16 Z] Diagonallinie $Q\,R$ schneiden müssen, daſs die Tangente α der Ecke A durch den Punkt A geht, in dem δ von der Diagonallinie $Q\,R$ geschnitten wird. In derselben Weise

ergiebt sich, dafs die Tangenten β und γ in B und Γ durch die Punkte B und C gehen müssen, in denen δ von den Diagonallinien $R\,P$ und $P\,Q$ geschnitten wird.

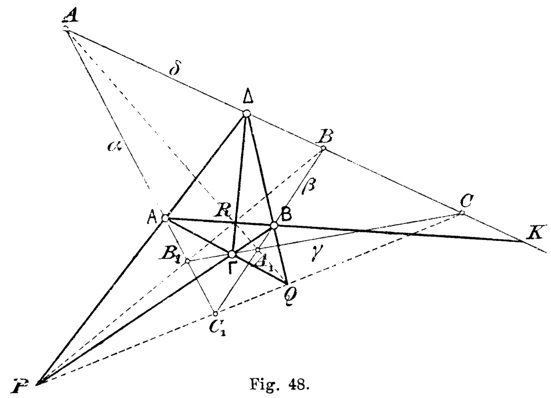

Fig. 48.

Betrachten wir das Kurvendreieck Δ A B, so wird[(51,1)] der Punkt K, in dem die Seite A B die Tangente δ der Gegenecke Δ schneidet, von dieser Gegenecke Δ durch A und B, die Schnittpunkte von δ mit den Tangenten in den beiden andern Ecken, harmonisch getrennt. Verbinden wir B mit diesen vier harmonischen Punkten Δ $K\,.\,A\,B$, so erhalten wir vier harmonische Strahlen, die die Diagonallinie $Q\,R$ in den vier harmonischen[(21,3)] Punkten $Q\,R\,.\,A\,A_1$ schneiden, wenn wir mit A_1 den Punkt bezeichnen, in dem die Tangente B $B = \beta$ die Diagonallinie $Q\,R$ schneidet. Durch denselben, von A durch Q und R harmonisch getrennten Punkt A_1 geht die Tangente Γ $C = \gamma$[(53)]. — Entsprechendes läfst sich für die Gegenecken $B\,B_1$ und die Diagonalpunkte $R\,P$ und schliefslich für $C\,C_1\,.\,P\,Q$ zeigen.

Nennen wir den Inbegriff der vier Tangenten $\delta\,\alpha\,\beta\,\gamma$ das dem Kurvenviereck Δ A B Γ *zugeordnete* Kurvenvierseit, so können wir das Ergebnis so ausdrücken:

Jedes Kurvenviereck hat mit dem zugeordneten Kurvenvierseit das Diagonaldreieck gemeinsam; je zwei Gegenecken des Kurvenvierseits werden durch zwei Diagonalpunkte harmonisch getrennt.

Jedes Büschelvierseit hat mit dem zugeordneten Büschelviereck das Diagonaldreiseit gemeinsam; je zwei Gegenseiten des Büschelvierecks werden durch zwei Diagonallinien harmonisch getrennt.

60 60. **Identität von Punktreihe und Strahlenbüschel zweiter Ordnung.** Es seien S und S_1 (Fig. 49) zwei beliebige Punkte einer Kurve und σ und σ_1 ihre Tangenten. Ist dann A irgend ein weiterer Punkt der Kurve, so ist die Kurve gegeben durch $S S_1 A$ und $T = \sigma\sigma_1$ [56 Z] und neue Kurvenpunkte Δ werden gefunden, indem man die in den Seiten $A S_1$ und $A S$ liegenden Punkte D und D_1, die mit T in einer Gerade liegen, aus S und S_1 projiziert [48 Z].

Wiederholen wir nun die Betrachtungen von Nr. 49, so gelangen wir zu einem wichtigen Satz. — Von dem Viereck $S S_1 A \Delta$ sind D und D_1 zwei Diagonalpunkte. Bezeichnen wir den dritten, den Schnittpunkt der Gegenseiten $S S_1$ und $A \Delta$, durch R, so läſst sich zeigen, daſs, während die Diagonallinie $D D_1$ sich um den Punkt T dreht, auch die beiden andern Diagonallinien $D R$ und $D_1 R$ sich um feste Punkte drehen. Weil die beiden Gegenseiten $S \Delta$ und $S_1 A$, die sich im Diagonalpunkt D schneiden, durch die beiden andern Diagonalpunkte D_1 und R harmonisch getrennt werden [24$_2$], so geht $D R$ durch den von T durch S und $A S_1$ harmonisch getrennten [21$_3$], festen [20$_2$] Punkt T_1; ebenso geht $D_1 R$ durch den von T durch S_1 und $A S$ harmonisch getrennten, festen Punkt T_2.

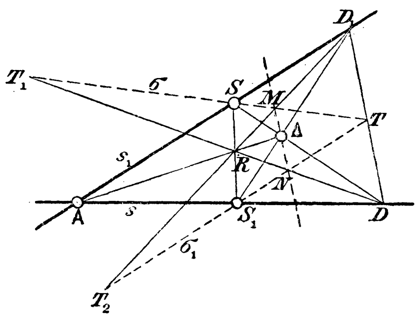

Fig. 49.

Weil ferner [53] die Tangenten in S und Δ, da die Seite $S \Delta$ durch den Diagonalpunkt D geht, sich auf der Diagonallinie $D_1 R$ schneiden müssen, so geht die Tangente von Δ durch den Punkt M, in welchem die Tangente $S T$ von $D_1 R$ geschnitten wird. Aus denselben Gründen geht die Tangente von Δ durch den Punkt N, in dem die Tangente $S_1 T$ von der Diagonallinie $D R$ geschnitten wird. Bewegt sich nun der Punkt D in $A S_1$, so haben wir [37 A]:

$$M\,[T_2] \;\overline{\overline{\wedge}}\; D_1\,[T] \;\overline{\overline{\wedge}}\; D\,[T_1] \;\overline{\overline{\wedge}}\; N.$$

Die Punkte M und N also, in denen die Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung zwei beliebige σ und σ_1 unter ihnen schneiden, sind projektiv aufeinander bezogen; die Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung lassen sich daher auffassen als die Verbindungslinien homologer Punkte zweier projektiven geraden Punktreihen. Den Inbegriff dieser Verbindungslinien aber haben wir einen krummen Strahlenbüschel genannt[42], so dafs wir haben:

Die Tangenten einer krummen Punktreihe bilden einen krummen Strahlenbüschel.	*Die Berührungspunkte der Strahlen eines krummen Büschels bilden eine krumme Punktreihe.*

Was wir demnach von den Strahlen eines krummen Büschels bewiesen haben, gilt auch von den Tangenten einer krummen Punktreihe und umgekehrt, so dafs wir in Zukunft statt von einem krummen Strahlenbüschel von einem *Tangentenbüschel* sprechen und auf ihn die bisher rechts gestellten Sätze anwenden können; von einem krummen Büschel sagen wir, dafs seine Strahlen eine krumme Punktreihe *umhüllen.* —

Aus unserm Beweise (Fig. 49) ergiebt sich noch die Kette perspektiver Glieder

$$\mathsf{A}\,(\Delta) \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} R\,[T_2] \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} M.$$

In Worten: *Wenn wir dem Strahle des beliebigen Kurvenpunktes* A, *der den Kurvenpunkt* Δ *projiziert, den Punkt der beliebigen Tangente* σ *zuordnen, in dem sie von der Tangente* δ *des Kurvenpunktes* Δ *geschnitten wird, so ist der Strahlenbüschel des Kurvenpunktes projektiv auf die Punktreihe der Tangente bezogen.*

Zusatz. Aus den vielen neuen Sätzen, die sich mit z
einem Schlage daraus ergeben, dafs die rechts gestellten Sätze auch Aussagen über krumme Punktreihen enthalten, heben wir vorläufig nur den folgenden hervor, der sich aus Nr. 49 ergiebt. Während wir bisher nur wufsten, dafs eine Kurve bestimmt ist durch *5 Punkte; 4 Punkte* und *1 Tangente; 3 Punkte* und *2 Tangenten* können wir jetzt hinzufügen: durch *2 Punkte* und *3 Tangenten; 1 Punkt* und *4 Tangenten; 5 Tangenten.* (Der Übersichtlichkeit wegen ist bei dieser Aufzählung nicht überall die Bedingung hinzugefügt, dafs Punkte und Tangenten, so weit sie paarweise auftreten, in einander fallen müssen).

61. **Kurvenvierseit.** 61

Aufgabe: Von einer Kurve sind vier Tangenten und der Berührungspunkt in einer dieser Tangenten gegeben; man soll die Berührungspunkte der übrigen Tangenten zeichnen.

Lösung: Das Diagonaldreieck $B B_1 R$ (Fig. 50) des gegebenen Kurvenvierseits $\sigma\ \sigma_1\ \alpha\ \beta$ ist zugleich[(59)] das Diagonaldreieck des gesuchten Kurvenvierecks $S S_1$ A B. Da nun die Tangente σ des gegebenen Punktes S und die

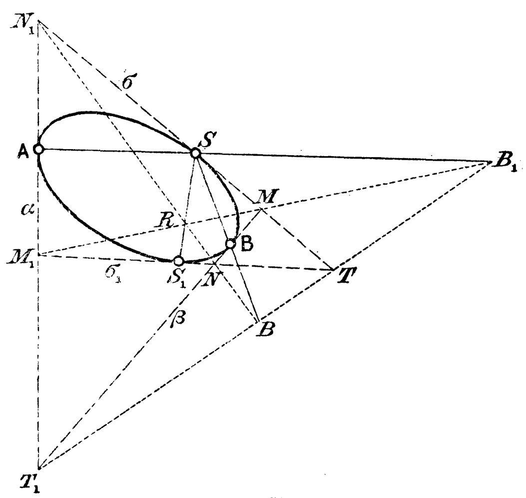

Fig. 50.

Tangente des gesuchten Punktes S_1 sich auf der Diagonallinie $B B_1$ schneiden, so mufs die Seite $S S_1$ durch den dritten Diagonalpunkt R gehen[(53)]. Wir erhalten also S_1 vermittelst der Gerade $S R$. — In ähnlicher Weise findet man die übrigen Berührungspunkte. —

Haben wir in der angegebenen Weise die Berührungspunkte der Tangenten σ_1 und α gezeichnet, so können wir aus $S S_1$ A und T die durch die gegebenen Stücke bestimmte Kurve zeichnen[(56 Z)]; die vorhergehende Konstruktion löst daher die

Aufgabe: Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, von der vier Tangenten und der Berührungspunkt in der einen dieser Tangenten gegeben ist.

In Zeichen: $S\,\sigma\,\sigma_1\,\alpha\,\beta$.

z *Zusatz.** In Nr. 43 zeigten wir, dafs jeder Schnitt eines Kreiskegels eine krumme Punktreihe ist. Wir kehren zu dem Beweise zurück, um ihm eine im folgenden benutzte Bemerkung hinzuzufügen.

Wir wählten[43] zwei beliebige Punkte S und S_1 des Kreises zu Mittelpunkten zweier Strahlenbüschel $a\,b\,c\ldots$ und $a_1\,b_1\,c_1\ldots$, die wir vermittelst der Kreislinie projektiv aufeinander bezogen; die Ebenen $\alpha\beta\gamma\ldots$ und $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\ldots$, die diese Strahlenbüschel aus den durch S und S_1 gehenden Kegelseiten s und s_1 projizierten, schnitten dann jede Ebene ε in zwei projektiven Strahlenbüscheln $a'\,b'\,c'\ldots \barwedge a_1'b_1'c_1'\ldots$ Wir richten jetzt unser Augenmerk auf die Kreistangente m_1 in S_1, die dem Strahl $S\,S_1 = m$ entspricht[13]; die Ebene μ_1, welche m_1 aus der Kegelseite s_1 projiziert, schneidet ε in dem Strahl m_1', der dem Strahle $m' = S'\,S_1'$ entspricht; m_1' ist daher[45] die Tangente der in ε liegenden krummen Punktreihe. Da S ein beliebiger Punkt des Kreises ist, so haben wir: Die Projektion jeder Kreistangente ist eine Tangente der in ε liegenden krummen Punktreihe. —

Mit Hülfe dieser Bemerkung können wir nun die Umkehrung von Nr. 43 beweisen, also den

Lehrsatz: Jede krumme Punktreihe ist ein Kegelschnitt oder

Krumme Punktreihe und Kegelschnitt sind identische Linien.

Die krumme Punktreihe, von der wir ausgehen, wollen wir durch S^2 bezeichnen und die Ebene, in der S^2 liegt, durch ε. Ist a eine beliebige Tangente von S^2 und A ihr Berührungspunkt, so legen wir durch a eine beliebige Ebene δ und zeichnen in dieser irgend einen Kreis, der die Gerade a in A berührt. Sind nun $b\,c\,d$ irgend drei weitere Tangenten von S^2, die a in $B\,C\,D$ schneiden, so ziehen wir von $B\,C\,D$ in δ die drei Tangenten $b_1\,c_1\,d_1$ an den Kreis. Die drei Ebenen $b\,b_1$, $c\,c_1$, $d\,d_1$ gehen durch einen Punkt K, und der Kegel, welcher den Kreis aus K projiziert, schneidet, wie wir zeigen wollen, die Ebene ε in S^2. Nach Nr. 43 schneidet der Kreiskegel die Ebene ε in einer krummen Punktreihe. Von dieser krummen Punktreihe, die wir zunächst S_1^2 nennen wollen, sind $b\,c\,d$ Tangenten, als Projektionen der Kreistangenten $b_1\,c_1\,d_1$; aufserdem ist a eine Tangente und A ein Punkt von S_1^2. Die beiden krummen Punktreihen S^2 und S_1^2 haben also vier Tangenten und den

Berührungspunkt der einen dieser Tangenten gemeinsam und sind daher[60 Z] identisch.

62 62. **Kurvenfünfseit.**

Aufgabe: Von einer Kurve sind fünf Tangenten gegeben, man soll die Berührungspunkte der Tangenten finden.

Lösung: Um die Berührungspunkte S und S_1 von σ und σ_1 zu finden, betrachten wir die Kurvenvierseite $\sigma \sigma_1 \alpha \beta$ und $\sigma \sigma_1 \alpha \gamma$ und zeichnen in jedem den Diagonalpunkt, der der Ecke $\sigma \sigma_1$ zugeordnet ist[16 Z], vermittelst des Schemas $\sigma \alpha \sigma_1 \beta$ und des Schemas $\sigma \alpha \sigma_1 \gamma$. Die Gerade, welche die in beiden Vierseiten gefundenen Diagonalpunkte R und R_1 verbindet, schneidet σ und σ_1 in den gesuchten Punkten S und S_1[53]. —

Haben wir in der angegebenen Weise die Berührungspunkte $S S_1 A$ gezeichnet, so können wir aus $S S_1 A$ und T die durch die gegebenen Stücke bestimmte Kurve zeichnen[56 Z]; die vorhergehende Konstruktion löst daher die

Aufgabe: Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, von der fünf Tangenten gegeben sind.

z *Zusatz.* Die Aufgabe läfst sich noch auf eine andere Weise lösen. Da wir jetzt[60] wissen, dafs das Büschelfünfseit[55] identisch ist mit dem Kurvenfünfseit, so läfst sich der Berührungspunkt z. B. der Tangente σ nach dem Schema $\sigma \sigma \alpha \beta \gamma \delta$ finden, indem man den Schnittpunkt der Verbindungslinien $(\sigma \alpha) . (\gamma \delta)$ und $(\alpha \beta) . (\sigma \delta)$ mit dem Schnittpunkt $\beta \gamma$ verbindet.

---

§ 5. Die gerade Involution.

63 63. **Involution.** In Nr. 38 haben wir eine Projektivität[37₁] betrachtet, in der *ein* Element seinem zugeordneten zweifach entspricht. Diese besondere Projektivität ist für uns ebenso wichtig wie die allgemeine; wir führen daher für sie einen neuen Namen ein durch die

1. Definition: *Eine Projektivität, in der* ein *Element seinem zugeordneten zweifach entspricht, heifst eine Involution.*

Der Fundamentalsatz[38] läſst sich dann so fassen:

2. Lehrsatz: *In einer Involution entspricht* jedes *Element seinem zugeordneten zweifach.* —

Zwei Grundgebilde, die eine Involution bilden, heiſsen involutorisch liegend oder kurz involutorisch. Den Begriff der involutorischen Lage kann man ausdehnen auf zwei *ungleichartige* Grundgebilde, z. B. auf eine Punktreihe s und einen Strahlenbüschel S. Ist die projektive Verwandtschaft von s und S durch $A\,B\,C \barwedge a\,b\,c$ bestimmt[33₂] und bezeichnen wir die Punkte, in denen s von $a\,b\,c$ geschnitten wird, durch $A_1\,B_1\,C_1$, so sind durch $A\,B\,C \barwedge A_1\,B_1\,C_1$ zwei projektive Punktreihen in s bestimmt. Haben diese involutorische Lage, so sagen wir auch von der Punktreihe $A\,B\,C\ldots$ und dem Strahlenbüschel $a\,b\,c\ldots$, daſs sie involutorische Lage haben:

3. Definition. Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel liegen involutorisch, wenn die Punktreihe und der Schnitt[6] ihres Trägers mit dem Strahlenbüschel involutorische Lage haben. —

Statt daſs man in Zeichen die involutorische Verwandtschaft zweier Grundgebilde ausdrückt durch $A\,A_1\,C\,D\ldots \barwedge A_1\,A\,C_1\,D_1\ldots$[38], spricht man auch häufig von der Involution $A\,A_1\,.\,C\,C_1\,.\,D\,D_1\ldots$ und nennt zwei homologe Elemente, z. B. $A\,A_1$, ein *Elementenpaar* der Involution und zwei solche Elementenpaare, z. B. $A\,A_1\,.\,C\,C_1$, einen *Wurf* der Involution. — Die allgemeine projektive Verwandtschaft zweier Grundgebilde ist bestimmt durch die willkürliche Annahme der sechs Elemente $A\,B\,C\,A_1\,B_1\,C_1$[33₂]; da bei der involutorischen Verwandtschaft der Punkt B in A_1 und B_1 in A fällt[38], so kann man nur vier Elemente $A\,A_1\,C\,C_1$ willkürlich annehmen. Um die Zusammengehörigkeit der Elemente kenntlich zu machen, sagt man, daſs die involutorische Verwandtschaft durch den Wurf[10₁] $A\,A_1\,.\,C\,C_1$ bestimmt ist. — Da eine Involution aus zwei projektiven Grundgebilden besteht, so ergiebt sich[37₃], daſs eine Involution, die *ein* Ordnungselement hat, noch ein zweites Ordnungselement hat. —

Um das, was sich uns über die Involution ergeben hat, für die Anwendung in knapper Form bereit zu haben, sprechen wir das Vorstehende noch einmal in kurzen Sätzen aus, indem wir die Definition in einer Fassung wiederholen, die auch für ungleichartige Gebilde gültig ist. Dabei wollen wir, trotzdem es nach der Entstehung der Involution eine Tautologie ist, besonders aussprechen, dafs die Elemente eines involutorischen Grundgebildes und die ihnen involutorisch zugeordneten projektiv sind.

4. *Zwei projektive Grundgebilde liegen involutorisch* (*bilden eine Involution*), *wenn* ein *Element seinem homologen zweifach entspricht.*

In Zeichen: Wenn $A\,A_1\,C\,D \ldots \barwedge A_1\,A\,C_1\,D_1 \ldots$ ist, so bilden $A\,A_1\,.\,C\,C_1\,.\,D\,D_1 \ldots$ eine Involution.

5. *Eine Involution ist durch einen Wurf bestimmt.*

6. *Eine Involution*, *die* ein *Ordnungselement hat*, *hat noch ein zweites Ordnungselement.*

7. *Die Elemente eines Grundgebildes und die ihnen involutorisch zugeordneten sind einander projektiv.* —

Bezeichnen wir die Ordnungselemente einer Involution durch P und Q und irgend ein weiteres Elementenpaar durch $A\,A_1$, so ist $P\,Q\,A\,A_1 \barwedge P\,Q\,A_1\,A$; folglich(40₃) ist $P\,Q\,.\,A\,A_1$ ein harmonischer Wurf. In Worten:

8. *Hat eine Involution zwei Ordnungselemente, so wird jedes Elementenpaar durch die beiden Ordnungselemente harmonisch getrennt.*

A *Anmerkung.* Eine Involution kann nicht mehr als zwei Ordnungselemente haben; denn sonst entspräche *jedes* Element sich selbst(33₁).

64 64. **Die Vierecksinvolution.** Sind Α Β Γ (Fig. 51) die Ecken eines Dreiecks und $A_1\,B_1\,C_1$ drei Punkte in den Gegenseiten, die in einer Gerade δ liegen, so werden, wie bewiesen werden soll, aus jedem Punkte Δ die drei Ecken und die Punkte in den Gegenseiten durch Strahlenpaare einer Involution Δ (Α A_1 . Β B_1 . Γ C_1) projiziert.

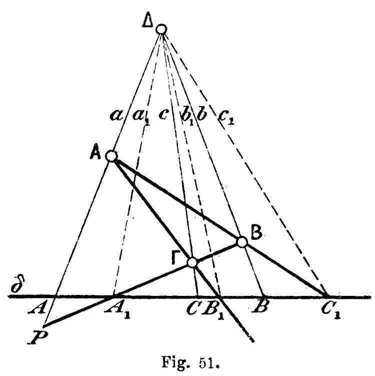

Fig. 51.

Schneiden die drei Strahlen Δ (Α Β Γ) die Gerade δ

in $A B C$, so ist, wenn wir noch den Schnittpunkt von $\Delta\,\mathsf{A}$ und $\mathsf{B}\,\Gamma$ durch P bezeichnen (37 A),

$$A A_1 B C [\Delta] \overline{\overline{\wedge}} P A_1 \mathsf{B}\,\Gamma [\mathsf{A}] \overline{\overline{\wedge}} A A_1 C_1 B_1 {}^{(39)} \overline{\wedge} A_1 A B_1 C_1.$$

Es bilden daher (63₄) $A A_1 . B B_1 . C C_1$ und mithin auch $\Delta (\mathsf{A} A_1 . \mathsf{B} B_1 . \Gamma C_1)$ oder $a a_1 . b b_1 . c c_1$ eine Involution.

1. **Lehrsatz:** *Die Ecken eines Dreiecks und drei Punkte der Gegenseiten, die in einer Gerade liegen, werden aus jedem Punkte durch Strahlenpaare einer Involution projiziert.* —

Da eine Involution durch zwei Strahlenpaare bestimmt ist (63₅), so gilt auch die

2. **Umkehrung:** *Den drei Strahlen einer Involution, die durch die Ecken eines Dreiecks gehen, sind drei Strahlen homolog, die die Gegenseiten in drei Punkten schneiden, die in einer Gerade liegen.*

Zusatz. Der Inhalt unsers Lehrsatzes läſst sich noch z
in anderer Form wiedergeben. — Der Punkt Δ bildet mit den Ecken des Dreiecks $\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma$ ein Viereck (Fig. 51), dessen Gegenseiten die Gerade δ in den Punktpaaren der Involution $A A_1 . B B_1 . C C_1$ schneiden,

und die Gerade δ bildet mit den Seiten des Dreiecks ein Vierseit, dessen Gegenecken $\mathsf{A} A_1 . \mathsf{B} B_1 . \Gamma C_1$ aus Δ durch die Strahlenpaare der Involution $a a_1 . b b_1 . c c_1$ projiziert werden.

Wir können daher unserm Satze die folgenden beiden Formen geben:

Viereckssinvolution. *Die Punkte, in denen eine beliebige Gerade durch die Gegenseiten eines Vierecks geschnitten wird, sind Punktpaare einer Involution.*

Vierseitsinvolution. *Die Strahlen, durch welche die Gegenecken eines Vierseits aus einem beliebigen Punkte projiziert werden, sind Strahlenpaare einer Involution.*

Anmerkung. Das Wort Involution wird im engern (und A
ursprünglichen) Sinn für den Inbegriff der drei Punktpaare gebraucht, in denen eine beliebige Gerade von den Gegenseiten eines Vierecks geschnitten wird. — Die Verallgemeinerung des Satzes geben wir in Nr. 170.

65. **Involutorische Paarung der Punkte einer 65
Gerade.** Mit Hülfe des eben (64 Z) gewonnenen Viereckssatzes lösen wir die

Aufgabe: Die Punkte einer Gerade involutorisch zu paaren.

Aufgabe: Die Strahlen eines Punktes involutorisch zu paaren.

Lösung: Ist der Wurf, der die Involution des Trägers s bestimmt[63 5], $A A_1 . B B_1$, so läfst sich die Aufgabe durch ein Viereck mit drei festen und drei beweglichen Seiten in folgender Weise lösen.

Die feste durch A (Fig. 52) gelegte Gerade möge von den festen durch B und B_1 gelegten Geraden in S und S_1 geschnitten werden. Um nun zum Punkte C den homologen C_1 zu finden, projizieren wir C aus S auf $S_1 B_1$ und den gefundenen Punkt D aus A_1 auf $S B$ und schliefslich den gefundenen Punkt D_1 aus S_1 auf den Träger s. Die Punkte C und C_1 bilden dann ein Punktpaar[64 Z] der durch $A A_1 . B B_1$ bestimmten Involution. —

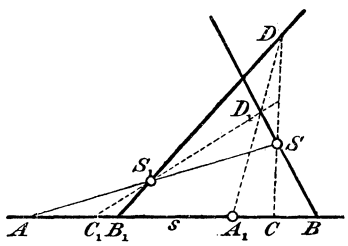

Fig. 52.

Unsere Konstruktion (und Figur) ist im Grunde eine Wiederholung der in Nr. 38 (Fig. 33) gegebenen Konstruktion mit der Vereinfachung, dafs die dort zum Beweise der involutorischen Lage notwendigen Linien weggelassen sind. Das Viereck $S S_1 D D_1$ mit den drei festen und drei beweglichen Seiten hiefs damals $\mathsf{A}_1 \mathsf{B} \Delta \Delta_1$. —

Identisch ist unsere Figur mit der Figur 46. Der (hier nicht benutzte) Schnittpunkt Δ der projektiven Strahlenbüschel $S D$ und $S_1 D_1$ beschreibt, wenn C sich in s bewegt, eine Kurve, die durch die Ecken des durch die drei festen Geraden gebildeten Dreiseits geht und die Geraden $A_1 S$ und $A_1 S_1$ berührt.

z *Zusatz*. Wiederholen wir unsere Konstruktion für den Fall, dafs A und A_1 zusammenfallen in P und B und B_1 in Q, so erkennen wir, dafs C und C_1 durch P und Q harmonisch getrennt werden[24 2]. Da sie perspektiv liegen zu den Strahlenbüscheln $S D$ und $S_1 D_1$, die durch A_1 projektiv auf einander bezogen sind, so können wir sagen, indem wir das Ergebnis auf beliebige Grundgebilde übertragen[33]:

Die Elemente eines Grundgebildes und die von ihnen durch zwei feste Elemente harmonisch getrennten sind einander projektiv. Die festen Elemente sind die Ordnungselemente der von den einander harmonisch zugeordneten Elementen gebildeten Involution.

In Zeichen: Sind $P\,Q\,.\,A\,A_1$, $P\,Q\,.\,B\,B_1$ u. s. w. harmonische Würfe, so folgt

$$P\,Q\,A\,B\,A_1 \ldots \barwedge P\,Q\,A_1\,B_1\,A \ldots$$

66. **Ordnungspunkte einer Involution.** Sind $A\,A_1$ 66
und $B\,B_1$ irgend zwei Punktpaare einer in dem Träger s liegenden Involution und $X\,X_1$ irgend ein weiteres Punktpaar, so wird, weil[63,7] $A\,A_1\,B\,X \barwedge A_1\,A\,B_1\,X_1$ ist, der Punkt X_1 den Träger s im Sinn[5] $A_1\,A\,B_1$ durchlaufen, wenn der Punkt X den Träger im Sinn $A\,A_1\,B$ durchläuft[30,4]. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

I. Der Wurf $A\,A_1\,.\,B\,B_1$ ist elliptisch, d. h.[10,2] die beiden Punktpaare trennen einander.

In diesem Fall ist der Sinn $A_1\,A\,B_1$ derselbe wie der Sinn $A\,A_1\,B$ (siehe Fig. 53). Wenn also X die Strecken

$$A\,B_1;\ B_1\,A_1;\ A_1\,B;\ B\,A$$

durchläuft, durchläuft X_1 die Strecken

$$A_1\,B;\ B\,A;\ A\,B_1;\ B_1\,A_1.$$

Es wird daher keine Strecke von beiden Punkten gleichzeitig durchlaufen; X fällt also in keinem Punkt mit X_1 zusammen, d. h.[37,2] die Involution hat keinen Ordnungspunkt:

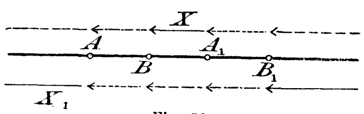

Fig. 53.

1. *Eine Involution hat keinen Ordnungspunkt, wenn einer ihrer Würfe elliptisch ist.*

II. Der Wurf $A\,A_1\,.\,B\,B_1$ ist hyperbolisch; d. h.[10,3] die beiden Punktpaare trennen einander nicht.

In diesem Fall ist der Sinn $A_1\,A\,B_1$ dem Sinn $A\,A_1\,B$ (siehe Fig. 54) entgegengesetzt. Wenn also X die Strecken

$$A\,A_1;\ A_1\,B;\ B\,B_1;\ B_1\,A$$

durchläuft, durchläuft X_1 die Strecken

$$A_1\,A;\ A\,B_1;\ B_1\,B;\ B\,A_1.$$

Da die Strecke $A A_1$ sowohl wie $B\,\dot{}\,B_1$ gleichzeitig und in entgegengesetztem Sinn durchlaufen wird, so giebt es

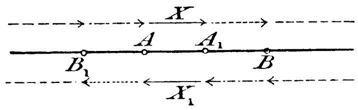

Fig. 54.

auf der Strecke $A A_1$ und auf der Strecke $B\,\dot{}\,B_1$ je einen Punkt, in dem X und X_1 zusammenfallen, einen Ordnungspunkt:

2. *Eine Involution hat zwei Ordnungspunkte, wenn einer ihrer Würfe hyperbolisch ist.* —

67 67. **Parabolischer Wurf.** Halten wir von den beiden Punktpaaren $A A_1 \,.\, B B_1$, die eine Involution bestimmen$^{(63_5)}$, drei Punkte $A A_1 B$ fest und lassen B_1 den Träger durchlaufen, so entspricht jeder Lage von B_1 eine bestimmte Involution. Nehmen wir an, dafs B auf $A A_1$ liegt, so sehen wir: So lange B_1 sich auf der Strecke $A A_1$ befindet, hat die Involution zwei Ordnungspunkte$^{(66_2)}$; liegt B_1 auf $A\,\dot{}\,A_1$$^{(5)}$, so hat die Involution keinen Ordnungspunkt$^{(66_1)}$. Von Interesse ist nun noch der Augenblick des Übergangs, wo B_1 sich in A_1 (oder in A) befindet. In diesem Fall ist der Wurf $A A_1 \,.\, B B_1$ weder elliptisch noch hyperbolisch. Wir nennen einen solchen Wurf, dessen beide Punktpaare einen Punkt (A_1) gemeinsam haben, *parabolisch.* Suchen wir für diese Lage der Punkte nach Nr. 65 zu einem beliebigen Punkte C den homologen C_1, so finden wir, dafs C_1 in A_1 (B_1) fällt; es entspricht daher jedem Punkte C der Punkt A_1, d. h. jeder Wurf ist parabolisch. Nennen wir den Punkt A_1, der allen Punkten (auch sich selbst) entspricht, einen Ordnungspunkt, so können wir den Satz aussprechen:

Eine Involution hat einen *Ordnungspunkt, wenn einer ihrer Würfe parabolisch ist.*

68 68. **Eine Involution und ihre Würfe.** Für die Ergebnisse von Nr. 66 und 67, die sich auf alle Grundgebilde übertragen lassen$^{(33)}$, finden wir einen kurzen Ausdruck, wenn wir noch die folgenden Bezeichnungen einführen:

1. Definition: Eine gerade Involution heifst elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch, je nachdem sie *kein* Ordnungselement, *zwei* Ordnungselemente oder *ein* Ordnungselement hat.

Da sich auch noch ergiebt, daſs jeder Wurf z. B. einer elliptischen Involution elliptisch sein muſs, so können wir zusammenfassend sagen:

2. *Eine gerade Involution und ihre Würfe sind gleichnamig.*

---

§ 6. Projektive Verwandtschaft krummer Grundgebilde.

69. Krumme Würfe. 69

Ist S ein beliebiger Punkt einer Kurve zweiter Ordnung, so schneidet jeder Strahl von S die Kurve noch in einem zweiten Punkte[52]. Bezeichnen wir nun die Punkte, in denen die Strahlen $a\,b\,c$ und x von S die Kurve zum zweiten Male schneiden, durch $\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma$ und X, so wird, wenn der Strahl x sich um S im Sinn $a\,b\,c$[4] dreht, der Punkt X von A nach B gelangen, ohne mit Γ zusammengefallen zu sein; dreht sich dagegen x im entgegengesetzten Sinn, so gelangt X von A nach Γ und dann erst nach B:

1. Ein Punkt X, der eine krumme Punktreihe beschreibt, kann auf zwei Weisen von einem Punkte A nach einem Punkte B gelangen, einmal indem er den Punkt Γ überschreitet, das andere Mal indem er den Punkt Γ nicht überschreitet.

Wir wollen auch hier wieder den ersten Bewegungssinn

Ist s ein beliebiger Strahl eines Büschels zweiter Ordnung, so geht durch jeden Punkt von s noch ein zweiter Strahl[52]. Bezeichnen wir nun die zweiten Strahlen des Büschels, welche durch die Punkte $A\,B\,C$ und X von s gehen, durch $\alpha\,\beta\,\gamma$ und x, so wird, wenn der Punkt X sich auf s im Sinn $A\,B\,C$[5] bewegt, der Strahl x von α nach β gelangen, ohne mit γ zusammengefallen zu sein; bewegt sich dagegen X im entgegengesetzten Sinn, so gelangt x von α nach γ und dann erst nach β:

1. Ein Strahl x, der einen krummen Strahlenbüschel beschreibt, kann auf zwei Weisen von einem Strahl α nach einem Strahl β gelangen, einmal indem er den Strahl γ überschreitet, das andere Mal indem er den Strahl γ nicht überschreitet.

Wir wollen auch hier wieder den ersten Bewegungssinn durch $A\,\Gamma\,B$, den zweiten durch $A\,B\,\Gamma$ bezeichnen. —

Setzen wir nun fest, dafs der Punkt X die krumme Punktreihe im Sinne $A\,B\,\Gamma$ beschreibt, so ist damit eine bestimmte *Reihenfolge* der Kurvenpunkte festgelegt. Ist Δ irgend ein vierter Punkt der Kurve, so kann die Reihenfolge der vier Punkte sein: $A\,\Delta\,B\,\Gamma$, $A\,B\,\Delta\,\Gamma$ oder $A\,B\,\Gamma\,\Delta$. Fassen wir die vier Punkte zu zwei Punktpaaren zusammen, deren Inbegriff wir zum Unterschied von einem geraden Punktwurf[10] einen *krummen Punktwurf* nennen, so kann in dem Wurf $A\,B\,.\,\Gamma\,\Delta$, je nach der Lage des Punktes Δ, das Punktpaar $A\,B$ das Punktpaar $\Gamma\,\Delta$ trennen (bei der Reihenfolge $A\,\Delta\,B\,\Gamma$) oder nicht trennen (bei der Reihenfolge $A\,B\,\Delta\,\Gamma$ und bei der Reihenfolge $A\,B\,\Gamma\,\Delta$). Berücksichtigen wir auch noch den Fall, dafs Δ in A (oder in B) fällt, so können wir für den krummen Punktwurf, wie wir es für den geraden gethan haben[10 u. 67], die drei Definitionen aufstellen:

2. *Ein krummer Punktwurf heifst elliptisch, wenn seine Punktpaare einander trennen; hyperbolisch, wenn seine Punktpaare einander nicht trennen; parabolisch, wenn die beiden Punktpaare einen Punkt gemeinsam haben.* —

durch $\alpha\,\gamma\,\beta$, den zweiten durch $\alpha\,\beta\,\gamma$ bezeichnen. —

Setzen wir nun fest, dafs der Strahl x den krummen Strahlenbüschel im Sinne $\alpha\,\beta\,\gamma$ beschreibt, so ist damit eine bestimmte *Reihenfolge* der Büschelstrahlen festgelegt. Ist δ irgend ein vierter Strahl des Büschels, so kann die Reihenfolge der vier Strahlen sein: $\alpha\delta\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta\gamma$ oder $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$. Fassen wir die vier Strahlen zu zwei Strahlenpaaren zusammen, deren Inbegriff wir zum Unterschied von einem geraden[11] Strahlenwurf einen *krummen Strahlenwurf* nennen, so kann in dem Wurf $\alpha\,\beta\,.\,\gamma\,\delta$, je nach der Lage des Strahles δ, das Strahlenpaar $\alpha\,\beta$ das Strahlenpaar $\gamma\,\delta$ trennen (bei der Reihenfolge $\alpha\,\delta\,\beta\,\gamma$) oder nicht trennen (bei der Reihenfolge $\alpha\,\beta\,\delta\,\gamma$ und bei der Reihenfolge $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$). Berücksichtigen wir auch noch den Fall, dafs δ in α (oder in β) fällt, so können wir für den krummen Strahlenwurf, wie wir es für den geraden gethan haben, die drei Definitionen aufstellen:

2. *Ein krummer Strahlenwurf heifst elliptisch, wenn seine Strahlenpaare einander trennen; hyperbolisch, wenn seine Strahlenpaare einander nicht trennen; parabolisch, wenn die beiden Strahlenpaare einen Strahl gemeinsam haben.* —

Vier Kurvenpunkte $\mathrm{A\,B\,\Gamma\,\Delta}$ werden aus irgend zwei weitern Kurvenpunkten S und S_1 durch zwei projektive Strahlengruppen $S\,(\mathrm{A\,B\,\Gamma\,\Delta}) \barwedge S_1\,(\mathrm{A\,B\,\Gamma\,\Delta})$ projiziert[50]. Da zwei projektive Strahlengruppen die Endglieder einer Kette von perspektiven Gliedern sind[30_1], so folgt aus Nr. 11_1, daſs zwei projektive Strahlengruppen immer gleichnamig sind; daher:

3. Ein krummer Punktwurf wird aus jedem Kurvenpunkt durch einen gleichnamigen Strahlenwurf projiziert.

Hieraus folgt, daſs Nr. 10_4 sich auf krumme Punktwürfe ausdehnen läſst:

4. *Von den drei krummen Würfen, die man aus vier Kurvenpunkten bilden kann, sind zwei hyperbolisch und einer elliptisch.*

Vier Büschelstrahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ schneiden irgend zwei weitere Büschelstrahlen s und s_1 in zwei projektiven Punktgruppen $s\,(\alpha\beta\gamma\delta) \barwedge s_1\,(\alpha\beta\gamma\delta)$[50]. Da zwei projektive Punktgruppen die Endglieder einer Kette von perspektiven Gliedern sind[30_1], so folgt aus Nr. 11_1, daſs zwei projektive Punktgruppen immer gleichnamig sind; daher:

3. Ein krummer Strahlenwurf schneidet jeden Büschelstrahl in einem gleichnamigen Punktwurf.

Hieraus folgt, daſs Nr. 11_2 sich auf krumme Strahlenwürfe ausdehnen läſst:

4. *Von den drei krummen Würfen, die man aus vier Büschelstrahlen bilden kann, sind zwei hyperbolisch und einer elliptisch.*

Anmerkung. Weil für einen krummen Strahlenbüschel A
unsere Betrachtungen der Vorstellung schwerer zugänglich sind als für eine krumme Punktreihe, so sind noch einmal[34] die dualen[7] Begründungen hinzugefügt.

70. **Harmonische Elemente eines krummen Grundgebildes.** Diese und die folgende Nummer dienen dazu, 70
die Worte harmonisch und projektiv auf die krumme Punktreihe und den krummen Strahlenbüschel zu übertragen. Diese Übertragung wird vermittelt durch die geraden Gebilde und stützt sich auf den Satz[50] von der projektiven Verwandtschaft gerader Gebilde, die perspektiv zu einem krummen Gebilde liegen. Sie bietet uns vor allem den Vorteil gröſserer Kürze beim Übersetzen unserer geometrischen Ergebnisse ins Deutsche, da wir beim Aussprechen

unserer Sätze die beim Beweise eingeschalteten geraden Gebilde weglassen können. —

1. Definition: Vier Punkte einer krummen Punktreihe heifsen harmonisch, wenn sie aus *einem* Punkte der Kurve durch vier harmonische Strahlen projiziert werden.

1. Definition: Vier Strahlen eines krummen Strahlenbüschels heifsen harmonisch, wenn sie *einen* Strahl des Büschels in vier harmonischen Punkten schneiden.

2. Lehrsatz: *Vier harmonische Punkte einer krummen Punktreihe werden aus* jedem *Kurvenpunkte durch vier harmonische Strahlen projiziert*[50].

2. Lehrsatz: *Vier harmonische Strahlen eines krummen Strahlenbüschels schneiden* jeden *Büschelstrahl in vier harmonischen Punkten.*

3. Lehrsatz: Durch ein Punktpaar und einen Punkt einer krummen Punktreihe ist der vierte harmonische Punkt bestimmt [23].

3. Lehrsatz: Durch ein Strahlenpaar und einen Strahl eines krummen Strahlenbüschels ist der vierte harmonische Strahl bestimmt.

4. Lehrsatz: Bilden vier Punkte einer krummen Punktreihe einen harmonischen Wurf, so geht der Träger des einen Punktpaares durch den Punkt, in dem sich die beiden Tangenten des andern Punktpaares schneiden.

4. Lehrsatz: Bilden vier Strahlen eines krummen Strahlenbüschels einen harmonischen Wurf, so liegt der Schnittpunkt des einen Strahlenpaares auf der Gerade, die die beiden Berührungspunkte des andern Strahlenpaares verbindet.

Beweis: Projizieren wir den krummen harmonischen Wurf $A B . \Gamma \Delta$ aus A und B, so erhalten wir [70_2] die beiden harmonischen Strahlenwürfe $A (A B . \Gamma \Delta)$ und $B (A B . \Gamma \Delta)$; folglich [40_2] $A (A B \Gamma \Delta) \barwedge B (B A \Gamma \Delta)$. Da dem Strahl $A B$ der Strahl $B A$ homolog ist, so schneiden sich [34] die Projektionsstrahlen $A A$ und $B B$, das sind [50 Z] die Tangenten in A und B, auf der Verbindungslinie $\Gamma \Delta$. —

Da durch das Punktpaar $A B$ und den Punkt Γ der vierte harmonische Punkt Δ bestimmt ist [70_3], so gilt auch die

5. Umkehrung: Geht der Träger des einen von zwei Punktpaaren einer krummen

5. Umkehrung: Liegt der Schnittpunkt des einen von zwei Strahlenpaaren eines

Reihe durch den Punkt, in dem sich die Tangenten des andern Paares schneiden, so bilden die beiden Punktpaare einen harmonischen Wurf.

krummen Büschels in der Gerade, die die Berührungspunkte des andern Strahlenpaares verbindet, so bilden die beiden Strahlenpaare einen harmonischen Wurf.

71. Projektive Verwandtschaft krummer Grundgebilde. 71

1. Definition: Die Punkte $ABC\ldots$ einer geraden Punktreihe (Die Strahlen $abc\ldots$ eines geraden Büschels) heiſsen zu den Punkten $\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma\ldots$ einer krummen Punktreihe k^2 projektiv, wenn der Strahlenbüschel, der die Kurvenpunkte $\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma\ldots$ aus irgend einem Kurvenpunkte S projiziert, projektiv ist zu der Punktreihe $A\,B\,C\ldots$ (zu dem Strahlenbüschel $a\,b\,c\ldots$).

2. Definition: Die Punkte $\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma\ldots$ einer krummen Punktreihe k^2 heiſsen projektiv zu den Punkten $\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,\Gamma_1\ldots$ einer krummen Punktreihe k_1^2, wenn der Strahlenbüschel, der $\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma\ldots$ aus einem Punkte S von k^2 projiziert, projektiv ist zu dem Strahlenbüschel, der die Punkte $\mathsf{A}_1\mathsf{B}_1\Gamma_1\ldots$ aus irgend einem Punkte S_1 von k_1^2 projiziert.

3. Lehrsatz: Projiziert man jede von zwei projektiven krummen Punktreihen aus einem beliebigen ihrer Punkte, so erhält man zwei projektive gerade Strahlenbüschel(50).

1. Definition: Die Strahlen $a\,b\,c\ldots$ eines geraden Büschels (Die Punkte $ABC\ldots$ einer geraden Punktreihe) heiſsen zu den Strahlen $\alpha\beta\gamma\ldots$ eines krummen Strahlenbüschels $\varkappa^2$ projektiv, wenn die Punktreihe, in der die Büschelstrahlen $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ irgend einen Büschelstrahl s schneiden, projektiv ist zu dem Strahlenbüschel $a\,b\,c\ldots$ (zu der Punktreihe $A\,B\,C\ldots$).

2. Definition: Die Strahlen $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ eines krummen Strahlenbüschels $\varkappa^2$ heiſsen projektiv zu den Strahlen $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$ eines krummen Strahlenbüschels $\varkappa_1^2$, wenn die Punktreihe, die $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ in irgend einem Strahl s von $\varkappa^2$ ausschneiden, projektiv ist zu der Punktreihe, die die Strahlen $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$ in irgend einem Strahl s_1 von $\varkappa_1^2$ ausschneiden.

3. Lehrsatz: Schneidet man jeden von zwei projektiven krummen Strahlenbüscheln durch einen beliebigen seiner Strahlen, so erhält man zwei projektive gerade Punktreihen.

4. Definition: Eine krumme Punktreihe und ein krummer Strahlenbüschel heifsen projektiv, wenn der Strahlenbüschel, der die Punktreihe aus einem ihrer Punkte projiziert, projektiv ist der Punktreihe, die der Strahlenbüschel in einem seiner Strahlen ausschneidet.

Wenn wir den von den Tangenten einer krummen Punktreihe gebildeten krummen Strahlenbüschel [(60)] den der Punktreihe *zugeordneten* Tangentenbüschel nennen, so läfst sich der zweite Satz in Nr. 60 kurz so aussprechen:

5. Lehrsatz: *Eine krumme Punktreihe und der ihr zugeordnete Tangentenbüschel sind einander projektiv.*

In Zeichen: Sind $\mathsf{A\,B\,\Gamma\,\Delta}$ irgend vier Punkte einer krummen Punktreihe und $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ ihre Tangenten, so ist $\mathsf{A\,B\,\Gamma\,\Delta} \barwedge \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$.

Die weitern Sätze sprechen wir für Punktreihe und Strahlenbüschel gemeinsam aus, indem wir jedem Satz die Nummer hinzufügen, auf die er sich stützt.

6. Sind zwei krumme Grundgebilde einem dritten geraden oder krummen Grundgebilde projektiv, so sind sie einander projektiv [(30$_3$)].

7. In zwei krummen projektiven Grundgebilden sind vier Elementen, die einen harmonischen Wurf bilden, vier Elemente homolog, die wieder einen harmonischen Wurf bilden [(30$_5$)].

8. Wenn zwei projektive krumme Grundgebilde, die in einander liegen, *drei* Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie *jedes* Element entsprechend gemein [(33$_1$)].

9. *Die projektive Verwandtschaft zwischen zwei krummen Grundgebilden ist durch drei Paar homologe Elemente bestimmt* [(33$_2$)].

72 72. **Die krumme Involution.** Nachdem wir in den beiden vorhergehenden Nummern die Worte harmonisch und projektiv auf die krummen Gebilde übertragen haben, stellen wir im folgenden die Sätze zusammen, die sich aus den über gerade Involutionen bewiesenen für die krumme Punktreihe und den krummen Strahlenbüschel ohne weiteres ergeben.

1. Der Inbegriff zweier projektiven krummen Grund-

gebilde, die in einander liegen, heiſst eine krumme Projektivität $^{(37_1)}$.

2. *Eine krumme Projektivität, in der* ein *Element seinem homologen zweifach entspricht, heiſst eine krumme Involution* $^{(63_1)}$.

3. *In einer krummen Involution entspricht* jedes *Element seinem zugeordneten zweifach* $^{(63_2)}$.

4. *Eine krumme Involution ist durch einen Wurf bestimmt* $^{(63_5)}$.

5. *Eine krumme Involution, die* ein *Ordnungselement hat, hat noch ein zweites Ordnungselement* $^{(63_6)}$.

6. *Eine krumme Involution heiſst elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch, je nachdem sie kein Ordnungselement, zwei Ordnungselemente oder ein Ordnungselement hat* $^{(68_1)}$.

7. *Eine krumme Involution und ihre Würfe sind gleichnamig* $^{(68_2)}$.

8. *Die Elemente eines krummen Grundgebildes und die ihnen involutorisch zugeordneten sind einander projektiv* $^{(63_7)}$.

9. *Ist eine krumme Involution hyperbolisch, so wird jedes Elementenpaar durch die beiden Ordnungselemente harmonisch getrennt* $^{(63_8)}$.

73. **Projektionsachse.** In einer Kurve sei uns eine 73
krumme Projektivität $^{(72_1)}$ $S\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,..\,\overline{\wedge}\,S_1\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,..$ (Fig. 55) gegeben. Projizieren wir die Punkte $S\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,..$ aus dem Punkte S_1 und die homologen Punkte $S_1\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,..$ aus S, so erhalten wir die beiden projektiven $^{(71_3)}$ Strahlenbüschel $S_1\,(S\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,..)\,\overline{\wedge}\,S\,(S_1\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,..)$. Da die Verbindungslinie $S\,S_1$ der Mittelpunkte sich selbst entspricht, so liegen die Schnittpunkte homologer Strahlen in einer Gerade p $^{(34)}$, die bestimmt ist durch den Schnittpunkt der Strahlen $S_1\,\mathsf{A}$ und $S\,\mathsf{A}_1$ und den Schnittpunkt der Strahlen $S_1\,\mathsf{B}$ und $S\,\mathsf{B}_1$. Diese Gerade p ist die Pascalsche Gerade des Kurvensechsecks $S\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}\,S_1\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}_1$; auf ihr schneiden sich daher $^{(54)}$ auch noch die Verbindungslinien $\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}$

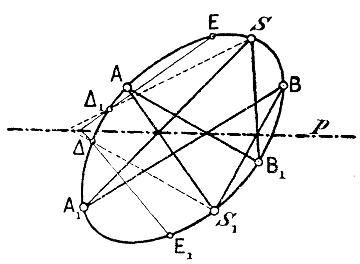

Fig. 55.

und $A\,B_1$. Würden wir also die beiden projektiven krummen Punktreihen nicht aus S_1 und S, sondern aus A_1 und A projiziert haben, so hätten wir dieselbe Gerade p erhalten. Die Gerade p, die demnach nur abhängig ist von der Projektivität, nicht aber von der Wahl des Punktes S_1 (S), heifst die *Projektionsachse* (Projektivitätsachse) der krummen Projektivität $S\,A\,B\,.. \overline{\wedge}\, S_1\,A_1\,B_1 \ldots$

> Lehrsatz: Die Gerade, welche einen beliebigen Punkt Δ einer krummen Projektivität mit dem ebenfalls beliebigen Punkte E_1 verbindet, schneidet die Gerade, die die homologen Punkte Δ_1 und E verbindet, in einem Punkte der Projektionsachse (Vergl. 36).

A *Anmerkung.* Beschränken wir diesen Satz auf drei Paar homologe Punkte und befreien ihn vom Begriff der projektiven Verwandtschaft [36 Z], so erkennen wir, dafs er nur eine andere Form des Pascalschen Satzes ist. — Da wir [44] zwei Geraden als einen besondern Fall einer krummen Punktreihe auffassen können, so läfst sich auch der Satz 36 als ein besonderer Fall des eben bewiesenen auffassen.

74 74. **Konstruktion einer krummen Projektivität.** Will man zwei krumme Punktreihen, die in einander liegen, projektiv so auf einander beziehen, dafs den Punkten $S\,A\,B$ die Punkte $S_1\,A_1\,B_1$ homolog werden, so kann man [71_3] die Punkte $S\,A\,B$ aus einem beliebigen Kurvenpunkte und $S_1\,A_1\,B_1$ aus einem zweiten beliebigen Kurvenpunkte projizieren und die erhaltenen geraden Strahlenbüschel projektiv auf einander beziehen [31]. Eine einfachere Konstruktion ergiebt sich mit Hülfe der Projektionsachse [73]:

Wir konstruieren die Projektionsachse p als Pascalsche Gerade des Kurvensechsecks $S\,A_1\,B\,S_1\,A\,B_1$ (Fig. 55) und bestimmen dann zu einem beliebigen Punkte Δ den homologen Δ_1 vermittelst des Strahles von S (oder A oder B), der p in demselben Punkte schneidet wie $S_1\,\Delta$ (oder $A_1\,\Delta$ oder $B_1\,\Delta$).

Z *Zusatz.* Schneidet die Projektionsachse p die Kurve in den Punkten K und L, so ergiebt unsere Konstruktion, dafs der Punkt K mit seinem homologen K_1 und ebenso L mit L_1 zusammenfällt, dafs also die Schnittpunkte der Projektionsachse mit der Kurve die Ordnungspunkte der

Projektivität sind. Ebenso ergiebt sich umgekehrt, dafs die Verbindungslinie der Ordnungspunkte die Projektionsachse ist.

Eine krumme Projektivität hat demnach zwei Ordnungspunkte oder keinen Ordnungspunkt, je nachdem die Projektionsachse zwei Punkte oder keinen Punkt mit der Kurve gemeinsam hat. Wir können noch hinzufügen, dafs die Projektivität *einen* Ordnungspunkt hat, wenn die Projektionsachse eine Tangente der Kurve ist.

75. **Ordnungselemente einer geraden Projektivität.** 75
Die vorhergehende Konstruktion läfst sich auch für jede gerade Projektivität verwerten. Wir wählen als Beispiel zwei in einem und demselben Träger s liegende projektive gerade Punktreihen $A\,B\,C \overline{\wedge} A_1\,B_1\,C_1$ (Fig. 56). Wir nehmen eine beliebige Kurve zu Hülfe und projizieren aus

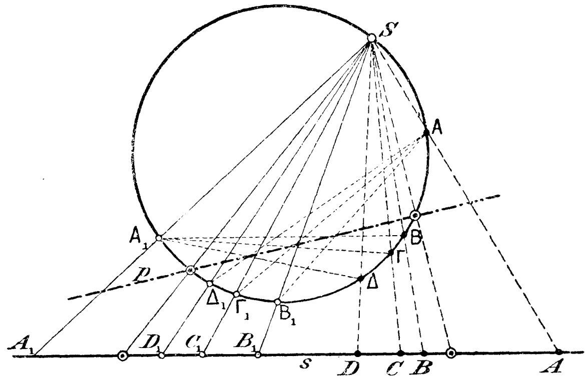

Fig. 56.

einem beliebigen Kurvenpunkte S sowohl die Punktreihe $A\,B\,C$ wie die Punktreihe $A_1\,B_1\,C_1$ und bezeichnen die zweiten [52] Schnittpunkte der Projektionsstrahlen mit der Kurve durch $\mathsf{A\,B\,\Gamma}$ und $\mathsf{A_1\,B_1\,\Gamma_1}$. Konstruieren wir dann für die krumme Projektivität [71_1 und 71_6] $\mathsf{A\,B\,\Gamma} \overline{\wedge} \mathsf{A_1\,B_1\,\Gamma_1}$ die Projektionsachse p als Pascalsche Gerade des Kurvensechsecks $\mathsf{A\,B_1\,\Gamma\,A_1\,B\,\Gamma_1}$ [73] so erhalten wir zu einem beliebigen Punkte D vermittelst $\mathsf{\Delta}$ und $\mathsf{\Delta_1}$ den homologen D_1.

Anmerkung. Diese Konstruktion empfiehlt sich, wenn A
man gleichzeitig untersuchen will, ob die gerade Pro-

jektivität Ordnungspunkte hat oder nicht. Schneidet die Projektionsachse die Kurve, so liefern die Projektionen der Schnittpunkte die Ordnungspunkte (Fig. 56). — Die Konstruktion wird am einfachsten, wenn man als Hülfskurve einen Kreis [42 Z] nimmt.

76 76. **Projektionszentrum.** Mit einer krummen Punktprojektivität $S\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,..\barwedge S_1\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,..$ ist auch immer eine krumme Strahlenprojektivität gegeben. Bezeichnen wir nämlich die zugeordneten Tangenten durch $s\,\alpha\,\beta\,..$ und $s_1\,\alpha_1\,\beta_1\,..$, so ist $S\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,..\barwedge s\,\alpha\,\beta\,..$ und $S_1\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,..\barwedge s_1\,\alpha_1\,\beta_1\,..$[$71_5$], daher [$71_6$] $s\,\alpha\,\beta\,..\barwedge s_1\,\alpha_1\,\beta_1\,...$ Schneiden wir den krummen Strahlenbüschel $s\,\alpha\,\beta\,..$ durch die Tangente s_1 und $s_1\,\alpha_1\,\beta_1\,..$ durch s, so erhalten wir die projektiven [71_3] geraden Punktreihen $s_1\,(s\,\alpha\,\beta\,..)\barwedge s\,(s_1\,\alpha_1\,\beta_1\,..)$. Da der Schnittpunkt $s\,s_1$ der Träger sich selbst entspricht, so gehen die Verbindungslinien homologer Punkte durch einen Punkt P[34]. Dieser Punkt P ist der Brianchonsche Punkt des Kurvensechsseits $s\,\underbrace{\alpha_1\,\beta}\,s_1\,\underbrace{\alpha\,\beta_1}$; durch ihn geht auch die Verbindungslinie der Punkte $\alpha_1\,\beta$ und $\alpha\,\beta_1$[54]. Würden wir also unsere beiden Strahlenbüschel nicht durch s_1 und s, sondern durch α_1 und α geschnitten haben, so hätten wir denselben Punkt P erhalten. Der Punkt P, der demnach unabhängig von der Wahl der Tangente s_1 (s) und nur abhängig von der Projektivität ist, heißt *Projektionszentrum* (Projektivitätszentrum) der krummen Projektivität $S\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,..\barwedge S_1\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,...$

Hat die krumme Punktprojektivität zwei Ordnungspunkte K und L, die krumme Strahlenprojektivität $s\,\alpha\,\beta\,..\barwedge s_1\,\alpha_1\,\beta_1\,..$ mithin zwei Ordnungsstrahlen $\varkappa$ und λ, so ist, weil der Strahl $\varkappa\,(\lambda)$ mit seinem homologen $\varkappa_1\,(\lambda_1)$ zusammenfällt, die Verbindungslinie der Schnittpunkte $s_1\,\varkappa$ und $s\,\varkappa_1$ der Ordnungsstrahl $\varkappa$; das Projektionszentrum P ist daher in diesem Fall der Schnittpunkt der Ordnungsstrahlen.

Unser Ergebnis fassen wir mit dem in Nr. 73 gewonnenen zusammen zu dem

> Lehrsatz: Durch eine krumme Punktprojektivität $S\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,..\barwedge S_1\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,..$ ist die Projektionsachse p und das Projektionszentrum P bestimmt. Die Projektionsachse ist die Pascalsche Gerade des Kurvensechsecks $S\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}\,S_1\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}_1$ und das Projektionszentrum der

Brianchonsche Punkt des zugeordneten Kurvensechsseits. — Jede Verbindungslinie $\mathsf{\Delta\,E_1}$ wird von der zugeordneten $\mathsf{\Delta_1\,E}$ in einem Punkte der Projektionsachse p geschnitten und jeder Schnittpunkt zweier Tangenten $\delta\,\varepsilon_1$ liegt mit dem zugeordneten $\delta_1\,\varepsilon$ in einem Strahl des Projektionszentrums P. —

Zusatz. Hat die Projektivität zwei Ordnungspunkte, so ist ihre Verbindungslinie die Projektionsachse und der Schnittpunkt ihrer Tangenten das Projektionszentrum. — Hat die Projektivität *einen* Ordnungspunkt, so ist seine Tangente die Projektionsachse (74 Z) und der Ordnungspunkt das Projektionszentrum (50 Z). z

77. Die einer krummen Projektivität zugeordneten Projektivitäten der Projektionsachse und des Projektionszentrums. Projizieren wir eine krumme Projektivität $\mathsf{A\,B\,\Gamma} \ldots \overline{\wedge}\, \mathsf{A_1\,B_1\,\Gamma_1} \ldots$ aus einem beliebigen M ihrer Punkte, so erhalten wir in M zwei projektive (71₃) Strahlenbüschel, die die Projektionsachse (73) p in zwei projektiven Punktreihen $A\,B\,C \ldots \overline{\wedge}\, A_1\,B_1\,C_1 \ldots$ schneiden. Es soll gezeigt werden, dafs man immer dieselbe gerade Projektivität in der Achse erhält, welchen Punkt der Kurve man auch zur Konstruktion wählt. 77

Ist N ein zweiter beliebiger Punkt der krummen Punktreihe, so ist also zu beweisen, dafs bei der Projektion der krummen Projektivität aus N auf die Achse z. B. A und A_1 wieder zwei homologe Punkte werden.

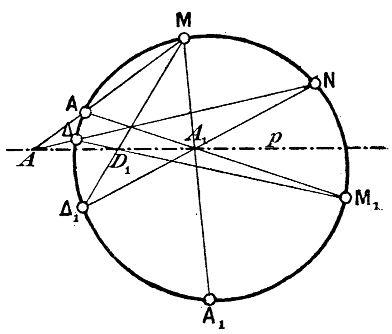

Fig. 57.

Weil $\mathsf{M\,A_1}$ (Fig. 57) durch A_1 geht, mufs $\mathsf{M_1\,A}$ ebenfalls durch A_1 gehen(76), d. h. der Punkt, in dem die Verbindungslinie $\mathsf{A}\,A_1$ die Kurve zum zweiten Male schneidet, ist der dem Punkte M homologe Punkt $\mathsf{M_1}$. Schneidet ferner der Strahl $\mathsf{N}\,A$ die Kurve zum zweiten Male in $\mathsf{\Delta}$, so zeichnen wir den homologen Punkt $\mathsf{\Delta_1}$, indem wir den Punkt

D_1, in dem $\mathsf{M}_1\,\Delta$ die Achse schneidet, aus M auf die Kurve projizieren[76].

Weil nun $\mathsf{N}\,\Delta$ durch A geht, so sind auch für die Projektion aus N die Punkte A und A_1 homolog, wenn $\mathsf{N}\,\Delta_1$ durch A_1 geht. Dies aber ergiebt sich aus dem Kurvensechseck $\mathsf{M}\,\mathsf{A}\,\mathsf{M}_1\,\Delta\,\mathsf{N}\,\Delta_1$; denn von diesem liegen nach der Konstruktion die Diagonalpunkte A und D_1 in der Achse; es mufs daher[54] die Seite $\mathsf{N}\,\Delta_1$ ihre Gegenseite $\mathsf{A}\,\mathsf{M}_1$ in einem Punkte der Achse schneiden, d. i. in A_1.

Die gerade Projektivität der Achse haben wir eben dadurch konstruiert, dafs wir die krumme Projektivität aus einem beliebigen ihrer Punkte projizierten. Man kann aber auch, wie die Figur zeigt, die gerade Projektivität aus der krummen erhalten, indem man den Kurvenpunkt A aus den beiden homologen Punkten M und M_1 projiziert. Da, wie wir sahen, $\mathsf{N}\,\Delta_1$ durch A_1 geht, so schneidet die (in der Figur nicht gezogene) Verbindungslinie $\Delta\,A_1$ die Kurve zum zweiten Male in N_1[73]. Projizieren wir also den Kurvenpunkt Δ aus N und N_1, so ergeben sich ebenfalls A und A_1 als homologe Punkte der geraden Projektivität. Wir können daher die gerade Projektivität auch dadurch aus der krummen herleiten, dafs wir die Kurvenpunkte aus irgend zwei festen homologen Punkten projizieren.

1. *Jeder krummen Projektivität ist in der Projektionsachse eine gerade Punktprojektivität zugeordnet. Diese zugeordnete Projektivität der Achse erhalten wir, indem wir die Projektionsachse schneiden*

entweder *durch die Strahlenpaare, welche die homologen Punkte der krummen Projektivität aus irgend einem festen Kurvenpunkte projizieren,*

oder *durch die Strahlenpaare, welche die Kurvenpunkte aus irgend zwei festen homologen Punkten der krummen Projektivität projizieren.* —

Durch die zugeordnete[76] Strahlenprojektivität $\alpha\,\beta\,\gamma\,..\;\overline{\wedge}\;\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,..$ erhalten wir in der beliebigen Tangente μ zwei projektive Punktreihen, die aus dem Projektionszentrum P durch zwei projektive Strahlenbüschel $a\,b\,c\,..\;\overline{\wedge}\;a_1\,b_1\,c_1\,..$ projiziert werden. Wählen wir eine andere Tangente ν, so erhalten wir, wie sich durch die den vorhergehenden dualen[7] Betrachtungen zeigen läfst, in P dieselben projektiven Strahlenbüschel.

2. *Jeder krummen Projektivität ist im Projektionszentrum eine gerade Strahlenprojektivität zugeordnet. Diese zugeordnete Projektivität des Zentrums erhalten wir, indem wir aus dem Zentrum projizieren*

entweder *die Punktpaare, in denen irgend eine feste Kurventangente von den homologen Tangenten der krummen Projektivität geschnitten wird,*

oder *die Punktpaare, in denen irgend zwei feste homologe Tangenten der krummen Projektivität von den Kurventangenten geschnitten werden.*

78. **Involutionsachse.** Entspricht in einer krummen 78
Projektivität[72,1] ein Punkt seinem homologen zweifach, in Zeichen $S S_1 A \ldots \barwedge S_1 S A \ldots$, so entspricht jeder Punkt[72,3] seinem homologen zweifach, in Zeichen $S S_1 A A_1 \ldots \barwedge S_1 S A_1 A \ldots$ Projizieren wir die Punktreihe $S A A_1 \ldots$ aus S_1 (Fig. 58) und die projektive Punktreihe $S_1 A_1 A \ldots$ aus S, so erhalten wir die projektiven[71,3] Strahlenbüschel $S_1 (S A A_1 \ldots) \barwedge S (S_1 A_1 A \ldots)$. Die homologen Strahlen schneiden sich in den Punkten der Projektionsachse p[73], die also hiernach die Verbindungslinie zweier Diagonalpunkte des Kurvenvierecks $S S_1 A A_1$ ist. Die Tangenten a und a_1 in den homologen Punkten A und A_1 schneiden sich daher in einem Punkte von p[53]. Nennen wir p jetzt nicht mehr Projektionsachse, sondern *Involutionsachse*, so haben wir den

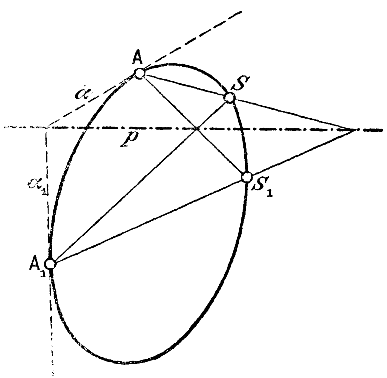

Fig. 58.

Lehrsatz: *Die Schnittpunkte der Tangenten in den homologen Punkten einer krummen Involution liegen in einer Gerade, der Involutionsachse.*

79. **Involutionszentrum.** Die der krummen Punkt- 79
projektivität $S A A_1 \ldots \barwedge S_1 A_1 A \ldots$ zugeordnete[76] Strahlen-

projektivität $s\,\alpha\,\alpha_1\,..\,\overline{\wedge}\,s_1\,\alpha_1\,\alpha\,..$ ist ebenfalls in involutorischer Lage[(72,2)]. Schneiden wir die Tangenten $s\,\alpha\,\alpha_1\,..$ durch s_1 und $s_1\,\alpha_1\,\alpha\,..$ durch s, so erhalten wir die beiden projektiven[(71,3)] geraden Punktreihen $s_1\,(s\,\alpha\,\alpha_1\,..)\,\overline{\wedge}\,s\,(s_1\,\alpha_1\,\alpha\,..)$. Die Verbindungslinien homologer Punkte dieser in s_1 und s liegenden projektiven Punktreihen gehen durch das Projektionszentrum[(76)] oder, wie wir hier sagen wollen, durch das *Involutionszentrum P*, das also hiernach der Schnittpunkt zweier Diagonallinien des Kurvenvierseits $s\,s_1\,\alpha\,\alpha_1$ ist. Da der Schnittpunkt zweier Diagonallinien des Kurvenvierseits $s\,s_1\,\alpha\,\alpha_1$ ein Diagonalpunkt des zugeordneten Kurvenvierecks $S\,S_1\,\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ ist[(59)], so geht auch die Verbindungslinie $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ durch P. Weil A und A_1 zwei beliebige homologe Punkte unserer krummen Involution sind, so haben wir den

Lehrsatz: *Die Verbindungslinien homologer Punkte einer krummen Involution gehen durch einen Punkt, das Involutionszentrum.*

80 80. **Viereck und Vierseit einer krummen Involution.** Die beiden vorhergehenden Sätze[(78 u. 79)] bilden die Grundlage der in § 7 folgenden Polarentheorie; wir sprechen sie deshalb noch in einer zweiten, für die spätern Anwendungen bequemern Form aus.

In Nr. 79 sahen wir, daſs der Diagonalpunkt, durch den die Gegenseiten $S\,S_1$ und $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ des Kurvenvierecks $S\,S_1\,\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ gehen, das Involutionszentrum ist, und in Nr. 78, daſs die Verbindungslinie der beiden andern Diagonalpunkte die Involutionsachse ist. Da nun $S\,S_1$ und $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ zwei beliebige Punktpaare unserer krummen Involution sind, so ergiebt sich:

1. Je zwei Punktpaare einer krummen Involution bilden ein Kurvenviereck, von dem ein Diagonalpunkt das Involutionszentrum ist, während die beiden andern Diagonalpunkte in der Involutionsachse liegen.

In Zeichen: Ist $S\,S_1\,.\,\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ irgend ein Wurf der krummen Involution, so ist der Schnittpunkt $(S\,S_1)(\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1)$ das Involutionszentrum und die Verbindungslinie von $(S\,\mathsf{A})\,(S_1\,\mathsf{A}_1)$ und $(S\,\mathsf{A}_1)\,(S_1\,\mathsf{A})$ die Involutionsachse.

Ferner sahen wir in Nr. 79, daſs der Schnittpunkt zweier Diagonallinien des Kurvenvierseits $s\,s_1\,\alpha\,\alpha_1$ das Involutionszentrum ist, und in Nr. 78, daſs sich die Seiten

α und α_1 (und ebenso s und s_1) in einem Punkte der Involutionsachse schneiden:

> 2. Je zwei Tangentenpaare einer krummen Involution bilden ein Kurvenvierseit, von dem eine Diagonallinie die Involutionsachse ist, während die beiden andern durch das Involutionszentrum gehen.
>
> In Zeichen: Sind $s\,s_1\,.\,\alpha\,\alpha_1$ die irgend einem Wurf der krummen Involution zugeordneten Tangenten, so ist die Verbindungslinie $(s\,s_1)\,(\alpha\,\alpha_1)$ die Involutionsachse und der Schnittpunkt von $(s\,\alpha)\,(s_1\,\alpha_1)$ und $(s\,\alpha_1)\,(s_1\,\alpha)$ das Involutionszentrum.
>
> *Zusatz.* Ist die krumme Punktinvolution hyper- z
> bolisch [(72 6)], so ist die Verbindungslinie ihrer Ordnungspunkte die Involutionsachse und der Schnittpunkt ihrer Tangenten das Involutionszentrum. — Ist die krumme Involution parabolisch, so ist der Ordnungspunkt das Involutionszentrum und seine Tangente die Involutionsachse [(76 Z)].

Die erste Bemerkung kann man zur Konstruktion der Ordnungselemente einer geraden Involution benutzen. Ist uns z. B. eine gerade Strahleninvolution $a\,a_1\,.\,b\,b_1$ gegeben, so schneidet sie in einer beliebigen Gerade s eine Punktinvolution aus. Projizieren wir diese aus irgend einem Punkte S einer beliebigen Kurve, so erhalten wir in S eine Strahleninvolution, die die Kurve in einer krummen Punktinvolution schneidet. Trifft die Achse dieser krummen Involution die Kurve, so hat die Involution zwei Ordnungspunkte. Projizieren wir diese aus S auf die Hülfsgerade s, so werden die erhaltenen Punkte aus dem Mittelpunkt des gegebenen geraden Strahlenbüschels durch die gesuchten Ordnungsstrahlen projiziert (vgl. 75).

81. **Die einer krummen Involution zugeordneten** 81
geraden Involutionen der Involutionsachse und des Involutionszentrums. Aus Nr. 77 haben wir noch einen Satz abzuleiten, indem wir die Projektivität zur Involution werden lassen. Der sich ergebende Satz wird seine Verwendung in der Theorie der konjugierten Involutionen (§ 8) finden. —

Projizieren wir eine krumme Involution aus irgend einem Kurvenpunkte, so erhalten wir in diesem eine gerade

Strahleninvolution[(71$_3$)], die die Involutionsachse wieder in einer Punktinvolution schneidet. Diese Punktinvolution der Achse ist unabhängig von der Wahl des Kurvenpunktes[(77$_1$)].

Ist nun $S S_1 . \mathsf{A} \mathsf{A}_1$ (Fig. 59) irgend ein Wurf der krummen Involution, so ist der Schnittpunkt der Gegenseiten $S S_1$ und $\mathsf{A} \mathsf{A}_1$ das Involutionszentrum P, während die Diagonalpunkte A und A_1, in denen sich die Gegenseiten

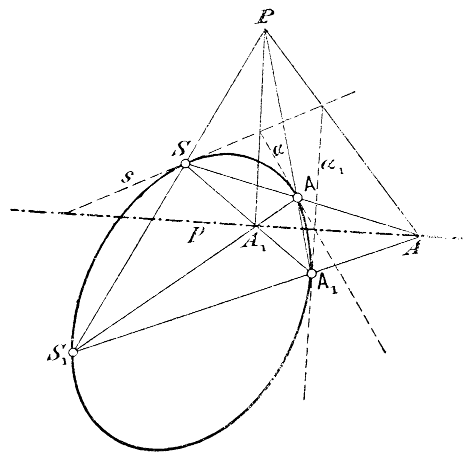

Fig. 59.

$S \mathsf{A}$ und $S_1 \mathsf{A}_1$, $S \mathsf{A}_1$ und $S_1 \mathsf{A}$ schneiden, in der Involutionsachse p liegen[(80$_1$)]. Projizieren wir die krumme Involution aus S, so liefern die Strahlen $S \mathsf{A}$ und $S \mathsf{A}_1$ die beiden homologen Punkte A und A_1 der in der Involutionsachse liegenden Involution.

Schneiden wir ferner die der krummen Punktinvolution zugeordnete[(76)] krumme Strahleninvolution durch irgend eine Tangente, so erhalten wir in dieser eine gerade Punktinvolution[(71$_3$)], die aus dem Involutionszentrum wieder durch eine Strahleninvolution projiziert wird. Diese Strahleninvolution ist unabhängig von der Wahl der Kurventangente[(77$_2$)].

Wählen wir die Tangente s, so werden $s\alpha$ und $s\alpha_1$ aus dem Involutionszentrum P durch zwei homologe Strahlen der in P induzierten Involution projiziert. Der Schnittpunkt $s\alpha$ liegt aber[(53)] in der Diagonallinie $P A_1$ des Kurvenvierecks $S S_1 \mathsf{A} \mathsf{A}_1$ und der Schnittpunkt $s\alpha_1$ in der Diagonallinie PA. Die beiden homologen Strahlen der Strahleninvolution des Involutionszentrums gehen also durch homologe Punkte der Punktinvolution der Involutionsachse:

> *Die durch eine krumme Involution in der Involutionsachse induzierte Punktinvolution ist ein Schnitt (liegt perspektiv zu) der im Involutionszentrum induzierten Strahleninvolution.*

---

§ 7. Pol und Polare.

82. **Die einem Punkte zugeordnete krumme Involution.** Ist P ein beliebiger Punkt und sind $S S_1$ und $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ irgend zwei Punktpaare der Kurve, deren Verbindungs- 82
linien durch P gehen, so ist P das Zentrum der durch den Wurf $S S_1 . \mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ bestimmten[(72$_4$)] krummen Involution[(79)]. — Sind Δ und Δ_1 irgend zwei Punkte, deren Verbindungslinie durch P geht, so sind Δ und Δ_1 auch zwei homologe Punkte unserer Involution $S S_1 . \mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$; denn die Gerade, welche den Punkt Δ mit seinem homologen verbindet, geht durch P[(79)] und die Gerade $P\Delta$ schneidet die Kurve zum zweiten Male in Δ_1[(52)].

Wir finden also den einem Punkte Δ homologen Punkt Δ_1, indem wir $P\Delta$ ziehen und den zweiten Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit der Kurve bestimmen. Die so vermittelst des festen Punktes P konstruierte Involution wollen wir die dem Punkte P zugeordnete krumme Involution nennen:

> Jedem Punkte P ist eine krumme Punktinvolution zugeordnet, deren Zentrum der Punkt P ist.

Zusatz. Gehen durch den Punkt P zwei Tangenten, so z
ist nach unserer Konstruktion der Berührungspunkt jeder Tangente ein sich selbst homologer Punkt, d. h.[(37$_2$)] ein Ordnungspunkt:

> 1. Einem Punkte P, durch den zwei Tangenten gehen, ist eine hyperbolische[(72$_6$)] krumme Involution zugeordnet, deren Ordnungspunkte die Berührungspunkte der beiden Tangenten sind. —

Ist P ein Kurvenpunkt, so ist nach unserer Konstruktion dem Punkt P jeder Punkt, auch der Punkt P selbst, homolog, so dafs unsere Involution *einen* Ordnungspunkt hat:

> 2. Jedem Kurvenpunkt P ist eine parabolische[(72$_6$)] krumme Involution zugeordnet, deren Ordnungspunkt der Punkt P ist.

83 83. **Die einer Gerade p zugeordnete krumme Punktinvolution.** Ist p eine beliebige Gerade und sind $s\,s_1$ und $\alpha\,\alpha_1$ irgend zwei Tangentenpaare der Kurve, deren Schnittpunkte in p liegen, so ist p die Achse der durch den Wurf $s\,s_1\,.\,\alpha\,\alpha_1$ bestimmten[(72$_4$)] krummen Involution[(78)]. — Sind δ und δ_1 irgend zwei Tangenten, deren Schnittpunkt in p liegt, so sind δ und δ_1 auch zwei homologe Strahlen unserer Involution $s\,s_1\,.\,\alpha\,\alpha_1$; denn der Punkt, in dem der Strahl δ von seinem homologen geschnitten wird, liegt in p[(78)] und durch den Punkt $p\,\delta$ geht die Tangente δ_1[(52)].

Wir finden also die einer Tangente δ homologe δ_1, indem wir $p\,\delta$ bestimmen und durch diesen Schnittpunkt die zweite Tangente legen. Auf die angegebene Weise können wir vermittelst der festen Gerade p eine Tangenteninvolution konstruieren. Die von den Berührungspunkten dieser Tangenten gebildete Punktinvolution[(71$_5$)] wollen wir die der festen Gerade p zugeordnete krumme Punktinvolution nennen:

> Jeder Gerade p ist eine krumme Punktinvolution zugeordnet, deren Achse die Gerade p ist.

z *Zusatz.* Schneidet die Gerade p die Kurve in zwei Punkten, so ist nach unserer Konstruktion die Tangente jedes Schnittpunktes ein sich selbst homologer Strahl, der Berührungspunkt also ein sich selbst homologer Punkt der konjugierten Punktinvolution:

> 1. Einer Gerade p, die mit der Kurve zwei Punkte gemeinsam hat, ist eine hyperbolische krumme Punktinvolution zugeordnet, deren Ordnungspunkte die Schnittpunkte sind. —

Ist p eine Kurventangente, so ist nach unserer Konstruktion der Gerade p jede Tangente, auch p selbst, homolog, so dafs unsere Tangenteninvolution *eine* Ordnungstangente, die zugeordnete krumme Punktinvolution also *einen* Ordnungspunkt hat:

> 2. Jeder Kurventangente p ist eine parabolische[(72$_6$)] krumme Punktinvolution zugeordnet, deren Ordnungspunkt der Berührungspunkt der Tangente p ist.

84. **Pol und Polare.** Wir haben in aller Ausführlichkeit 84
gezeigt, dafs mit einer krummen Punktinvolution ein Punkt P, das Involutionszentrum(79), und eine Gerade p, die Involutionsachse(78), verbunden ist und ferner, dafs auch umgekehrt mit jedem Punkte P(82) und mit jeder Gerade p(83) eine krumme Punktinvolution verbunden ist. Es ist also auch mit jedem Punkte P eine bestimmte Gerade und mit jeder Gerade p ein bestimmter Punkt verbunden. Für die folgenden Anwendungen nun ist es vorteilhaft, diesen Zusammenhang zwischen Punkt und Gerade [scheinbar] loszulösen von dem vermittelnden Begriff der krummen Punktinvolution, um [wenigstens in Worten] einen direkten Zusammenhang zwischen Punkt und Gerade herzustellen. Diesem Zwecke dienen die folgenden beiden Definitionen. —

Da eine Involution durch zwei Elementenpaare bestimmt ist(72₄), so kann es weder zwei Punkte noch zwei Geraden geben, die dieselbe krumme Punktinvolution erzeugen(82 u. 83); wohl aber kann ein Punkt dieselbe Involution erzeugen wie eine Gerade.

1. Definition: *Die Gerade, welche dieselbe krumme Punktinvolution erzeugt wie der Punkt* P, *heifst die Polare des Punktes* P.

2. Definition: *Der Punkt, der dieselbe krumme Punktinvolution erzeugt wie die Gerade* p, *heifst der Pol der Gerade* p.

Aus dieser Definition ergiebt sich sofort der

3. Lehrsatz: Der Punkt P ist der Pol der Gerade p, wenn p die Polare von P ist, oder

Die Gerade p ist die Polare des Punktes P, wenn P der Pol von p ist;

und ferner:

4. Die Involutionsachse ist die Polare des Involutionszentrums oder

Das Involutionszentrum ist der Pol der Involutionsachse.

85. **Poldreieck.** Aus vier Kurvenpunkten Δ A B Γ lassen 85
sich drei krumme Würfe(69) bilden: ΔA.BΓ; ΔB.ΓA; ΔΓ.AB. Jeder Wurf bestimmt eine krumme Involution(72₄); von der ersten z. B. ist der Diagonalpunkt $P =$ (Δ A) (B Γ) das Involutionszentrum und die Verbindungslinie der beiden

andern Diagonalpunkte die Involutionsachse[(80$_1$)]. Von dem Kurvenviereck $\Delta A B \Gamma$ ist daher[(84$_4$)] jeder Diagonalpunkt der Pol der gegenüberliegenden Diagonallinie. Nennen wir ein Dreieck, dessen Ecken die Pole ihrer Gegenseiten sind, ein *Poldreieck*, so können wir das Ergebnis kurz so aussprechen:

1. *Das Diagonaldreieck jedes Kurvenvierecks ist ein Poldreieck.*

Ebenso ergiebt sich[(80$_2$)]:

2. Das Diagonaldreiseit jedes Kurvenvierseits ist ein Poldreieck.

86 86. **Punkte, die in der Polare liegen.** Ist P der Diagonalpunkt $(S S_1)(A A_1)$ des Kurvenvierecks $S S_1 A A_1$ (Fig. 60), mit andern Worten, ist P das Zentrum[(82)] der durch $S S_1 . A A_1$ bestimmten krummen Involution, so liegen

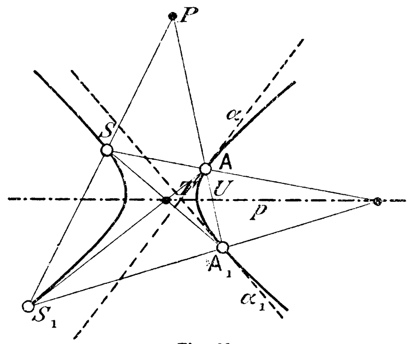

Fig. 60.

die beiden andern Diagonalpunkte in der Involutionsachse[(80$_1$)], also[(84$_4$)] in der Polare p von P. — Schneidet p die Seite $A A_1$ in U, so ist U von P durch A und A_1 harmonisch getrennt[(24$_3$)]. — Die Tangenten α und α_1 in A und A_1 schneiden sich in einem Punkte T von p[(78)]. — Wir haben also den

Lehrsatz: *In der Polare eines Punktes* P *liegen*

1. *zwei Diagonalpunkte jedes Kurvenvierecks, dessen dritter Diagonalpunkt* P *ist;*

2. *jeder Punkt* U, *der durch zwei Kurvenpunkte, deren Verbindungslinie durch* P *geht, von* P *harmonisch getrennt ist;*

3. *jeder Punkt* T, *in dem sich zwei Tangenten schneiden, deren Berührungspunkte mit* P *in einer Gerade liegen.*

Zusatz. Gehen durch den Punkt P zwei Tangenten Z
der Kurve, so ist ihm eine hyperbolische Involution (82 Z 1) zugeordnet; die Verbindungslinie der Ordnungspunkte ist die Achse der hyperbolischen Involution(80 Z), also(84,) die Polare von P:

1. *Gehen durch einen Punkt* P *zwei Tangenten, so liegen die Berührungspunkte dieser Tangenten in der Polare von* P. —

Ist P ein Kurvenpunkt, so ist die zugeordnete Involution parabolisch(82 Z 2); die Involutionsachse einer parabolischen Involution ist die Tangente(80 Z):

2. *Die Polare eines Kurvenpunktes ist seine Tangente.* —

3. Jeder Punkt, der in seiner Polare liegt, ist ein Kurvenpunkt.

Wäre P nicht ein Punkt der Kurve, so würde die Gerade, welche P mit einem beliebigen Kurvenpunkt A verbindet, die Kurve noch in einem zweiten(52), von P verschiedenen Punkt A_1 schneiden; die Polare von P müfste dann durch den von P durch A und A_1 harmonisch getrennten Punkt U gehen(86₂), während sie doch durch P geht.

87. **Geraden, die durch den Pol gehen.** Ist p die 87
Diagonallinie $(s s_1)(\alpha \alpha_1)$ des Kurvenvierseits $s s_1 \alpha \alpha_1$ (Fig. 61), mit andern Worten ist p die Achse (83) der durch die Be-

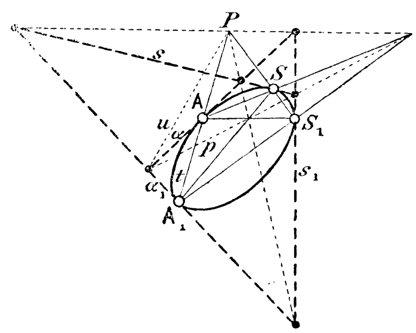

Fig. 61.

rührungspunkte $S S_1 . A A_1$ bestimmten Involution, so gehen die beiden andern Diagonallinien durch das Involutionszentrum(80₂), also(84,) durch den Pol P von p. — Wird P aus der Ecke $\alpha \alpha_1$ durch u projiziert, so ist u von p durch α

und α_1 harmonisch getrennt[25₂]. — Die Berührungspunkte der Tangenten α und α_1 liegen in einem Strahle t von P[79]. — Wir haben also den

Lehrsatz: *Durch den Pol einer Gerade* p *gehen*

1. *zwei Diagonallinien jedes Kurvenvierseits, dessen dritte Diagonallinie* p *ist;*

2. *jede Gerade* u, *die durch zwei Tangenten, deren Schnittpunkt in* p *liegt, von* p *harmonisch getrennt ist;*

3. *jede Gerade* t, *die zwei Kurvenpunkte verbindet, deren Tangenten sich in einem Punkte von* p *schneiden.*

Z *Zusatz.* Schneidet die Gerade p die Kurve in zwei Punkten, so ist ihr eine hyperbolische Involution[83 Z 1] zugeordnet; der Schnittpunkt der Tangenten in den Ordnungspunkten ist das Involutionszentrum[80 Z], also[84₄] der Pol von p:

1. *Schneidet die Gerade* p *die Kurve in zwei Punkten, so gehen die Tangenten dieser Schnittpunkte durch den Pol von* p. —

Ist p eine Tangente, so ist die zugeordnete Involution parabolisch[83 Z 2]; das Involutionszentrum einer parabolischen Involution ist der Berührungspunkt von p[80 Z]:

2. *Der Pol einer Tangente ist ihr Berührungspunkt.*

3. Jede Gerade, die durch ihren Pol geht, ist eine Tangente (vgl. 86 Z 3).

88 88. **Konstruktion der Polare.** Die Polare eines Punktes P finden wir[86]

1. vermittelst eines Kurvenvierecks, dessen einer Diagonalpunkt P ist: indem wir die beiden andern Diagonalpunkte verbinden;

2. vermittelst zweier Punktpaare $S S_1$ und $A A_1$, deren Träger durch P gehen: indem wir die von P durch diese beiden Punktpaare harmonisch getrennten Punkte mit einander verbinden;

3. vermittelst zweier Tangentenpaare $s s_1$ und $\alpha \alpha_1$, deren Berührungspunkte mit P in einer Gerade liegen: indem wir die Schnittpunkte dieser Tangentenpaare mit einander verbinden.

89 89. **Konstruktion des Pols.** Den Pol einer Gerade p finden wir[87]

1. vermittelst eines Kurvenvierseits, dessen eine Diagonallinie p ist: indem wir den Schnittpunkt der beiden andern Diagonallinien bestimmen;

2. vermittelst zweier Tangentenpaare $s\,s_1$ und $\alpha\,\alpha_1$, deren Schnittpunkte in p liegen: indem wir den Schnittpunkt der durch diese beiden Tangentenpaare von p harmonisch getrennten Geraden bestimmen;

3. vermittelst zweier Punktpaare $S\,S_1$ und $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$, deren Tangenten sich auf p schneiden: indem wir den Schnittpunkt der Träger dieser beiden Punktpaare bestimmen.

90. **Involutorische Lage von Pol und Polare.** 90

1. Lehrsatz: Ist P ein beliebiger Punkt und Q irgend ein Punkt seiner Polare, so läfst sich stets ein Kurvenviereck zeichnen, von dem P und Q zwei Diagonalpunkte sind und von dem eine Ecke in den beliebigen Kurvenpunkt S fällt.

Lösung: Wir verbinden den beliebigen Kurvenpunkt S (Fig. 62) mit P und den Punkt S_1, in dem diese Verbindungslinie die Kurve zum zweiten Male schneidet, mit Q. Schneidet $Q\,S_1$ die Kurve zum zweiten Male in A, so ziehen wir noch $\mathsf{A}\,P$ und bezeichnen den zweiten Schnittpunkt von $\mathsf{A}\,P$ und der Kurve durch A_1.

Da von diesem Kurvenviereck $S\,S_1\,\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ nach der Konstruktion P ein Diagonalpunkt ist, so mufs jeder der beiden andern Diagonalpunkte in der Polare p liegen(86₁); es mufs daher, weil $S_1\,\mathsf{A}$ die Polare in Q schneidet, $S\,\mathsf{A}_1$ durch Q gehen, so dafs $S\,S_1\,\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ das verlangte Kurvenviereck ist. —

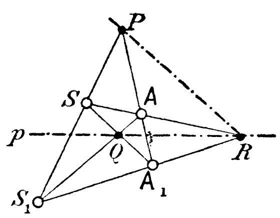

Fig. 62.

Auch die Gegenseiten $S\,\mathsf{A}$ und $S_1\,\mathsf{A}_1$ des gezeichneten Kurvenvierecks schneiden sich in einem Punkte R (Fig. 62) der Polare p(86₁); und da die Diagonallinie $R\,P$ des Kurvenvierecks $S\,S_1\,\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ die Polare des gegenüberliegenden Diagonalpunktes Q ist(85), so haben wir gleichzeitig zum Punkte Q die Polare, die Gerade $P\,R$, gefunden. Da Q ein beliebiger Punkt von P ist, so haben wir den

2. Lehrsatz: *Die Polaren der Punkte einer Gerade gehen durch einen Punkt, den Pol der Gerade.* —

Halten wir (Fig. 62) den Punkt P und den Punkt S, und mithin auch S_1, fest und lassen Q auf der Polare sich bewegen, so ist

$$Q \,\overline{\overline{\wedge}}\, S(Q) \,\overline{\overline{\wedge}}\, S_1(\mathsf{A})^{(50)} \,\overline{\wedge}\, S(\mathsf{A}) \,\overline{\overline{\wedge}}\, R \,\overline{\overline{\wedge}}\, P(R).$$

Der Strahlenbüschel $P(R)$ beschreibt also einen zu der Punktreihe Q projektiven Strahlenbüschel. Wenn Q in R fällt, so fällt A_1 in A, R also in Q. Der Strahlenbüschel $P(R)$ und die Punktreihe Q haben also involutorische Lage[(63$_3$)]. Da $P(R)$ die Polare von Q ist[(85)], so haben wir:

3. *Die Punkte einer Gerade und die Strahlen ihres Pols sind involutorisch auf einander bezogen, wenn man jedem Punkte der Gerade seine Polare zuweist.* —

Wir gehen jetzt nicht wie bisher von einer Gerade p, sondern von einem beliebigen Punkte P aus; a und b seien zwei seiner Strahlen und A und B die Pole von a und b. Ziehen wir die Verbindungslinie $AB = p$, so müssen, weil a und b die Polaren von A und B sind[(84$_2$)], die Polaren der Punkte $ABC\ldots$ der Gerade p durch P gehen[(90$_2$)] und projektiv auf $ABC\ldots$ bezogen sein[(90$_3$)]. Da demnach den Strahlen abc eines beliebigen Punktes P die Punkte einer Gerade p als Pole zugeordnet sind, so können wir den beiden vorhergehenden Sätzen die folgenden hinzufügen:

4. *Die Pole der Strahlen eines Punktes liegen in einer Gerade, der Polare des Punktes.*

5. *Die Strahlen eines Punktes und die Punkte seiner Polare sind involutorisch auf einander bezogen, wenn man jedem Strahl des Punktes seine Polare zuweist.*

91 91. **Die Pole eines krummen Strahlenbüschels.** Ist uns eine krumme Punktreihe, die wir kurz mit k^2 bezeichnen wollen, gegeben und außerdem zwei projektive gerade Punktreihen $ABC\ldots \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 \ldots$ in den Trägern s und s_1, so wissen wir, daß die Polaren $abc\ldots$ der Punkte $ABC\ldots$ den geraden Strahlenbüschel S und die Polaren $a_1 b_1 c_1 \ldots$ von $A_1 B_1 C_1 \ldots$ den geraden Strahlenbüschel S_1 bilden[(90$_2$)] und daß $abc\ldots \overline{\wedge}\, a_1 b_1 c_1 \ldots$ ist[(90$_3$ u. 30$_3$)]. Von der Verbindungslinie $AA_1 = \alpha$ ist der Schnittpunkt $aa_1 = A$ der Pol[(90$_2$)]. Da nun die Geraden $\alpha\beta\gamma\ldots$, die die homologen Punkte zweier projektiven geraden Punktreihen s und s_1 verbinden, die Strahlen eines krummen Strahlenbüschels

s^2[42]; und die Punkte Α Β Γ ..., in denen sich die homologen Strahlen zweier projektiven geraden Strahlenbüschel S und S_1 schneiden, die Punkte einer krummen Punktreihe S^2 sind, so haben wir den

1. Lehrsatz: Die Pole der Strahlen eines krummen Büschels bilden eine krumme Punktreihe. —

Bezeichnen wir den Schnittpunkt $s\,s_1$ der Träger s und s_1 durch M, so ist die Polare von $M = s\,s_1$ die Verbindungslinie $S\,S_1 = m$[90$_4$]. Ist M_1 der dem Punkte M in s_1 homologe Punkt, also[45] der Berührungspunkt des Strahles s_1, und m_1 seine Polare, so ist m_1 der dem Strahl $S\,S_1 = m$ homologe Strahl und daher[45] die Tangente in S_1. Dem Berührungspunkte M_1 von s_1 entspricht also die Tangente m_1 des Poles S_1. Da wir zur Konstruktion von s^2 statt des Strahles s_1 jeden andern Strahl des krummen Büschels verwenden können[50], so können wir dem vorhergehenden Satze den folgenden hinzufügen:

2. Die Polaren der Berührungspunkte des krummen Strahlenbüschels s^2 sind die Tangenten der krummen Punktreihe S^2.

Zusatz. Man nennt die krummen Grundgebilde s^2 und S^2 *Polarfiguren* und die Konstruktion, durch die wir die eine Figur aus der andern erhalten haben, *Polarisation.* Durch eine solche Polarisation erhalten wir zu jedem Satze einen dualen[7]. z

Wählen wir z. B. sechs Strahlen von s^2, so sind ihre sechs Pole Punkte von S^2. Nehmen wir nun an, daſs der Satz des Pascal bewiesen wäre, so würde, weil die Polaren dreier Punkte, die in einer Gerade (der Pascalschen) liegen, durch einen Punkt gehen[90$_2$], aus unserer Polarisation der Lehrsatz des Brianchon[54] folgen. *Die hier gelehrte Polarisation berechtigt uns also zur Verwendung des Gesetzes der Dualität*[7].

§ 8. Konjugierte Involutionen.

92. **Konjugierte Involution.** Wenn der Punkt Q in der Polare p von P liegt, so geht die Polare q von Q durch P[90$_2$]. Wenn also ein Punkt Q in der Polare eines andern Punktes P liegt, so liegt auch dieser zweite Punkt P 92

in der Polare des ersten Punktes Q. Wir können demnach die folgende Definition aufstellen:

1. Definition. *Zwei Punkte heifsen hinsichtlich einer Kurve konjugiert, wenn der eine in der Polare des andern liegt.*

1. Definition. *Zwei Geraden heifsen hinsichtlich einer Kurve konjugiert, wenn die eine durch den Pol der andern geht.*

Hieraus ergiebt sich:

2. Sind zwei Punkte einem dritten konjugiert, so ist ihre Verbindungslinie die Polare des dritten Punktes (Definition).

2. Sind zwei Geraden einer dritten konjugiert, so ist ihr Schnittpunkt der Pol der dritten Gerade (Definition).

3. Ein Diagonalpunkt eines Kurvenvierecks ist jedem der beiden andern Diagonalpunkte konjugiert[85_1].

3. Eine Diagonallinie eines Kurvenvierseits ist jeder der beiden andern Diagonallinien konjugiert[85_2].

4. Zwei konjugierte Punkte werden durch zwei Kurvenpunkte, die mit ihnen in einer Gerade liegen, harmonisch getrennt[86_2]. —

4. Zwei konjugierte Geraden werden durch zwei Kurventangenten, die mit ihnen durch einen Punkt gehen, harmonisch getrennt[87_2]. —

Ist p eine beliebige Gerade, P ihr Pol und Q ein beliebiger Punkt von p; schneidet ferner die (durch P gehende) Polare q von Q die Gerade p in R, so sind Q und R zwei konjugierte Punkte, PQ und PR zwei konjugierte Geraden. Lassen wir Q in der Gerade p sich bewegen, so bilden Q und R zwei projektive Punktreihen in involutorischer Lage[90_3]:

5. *Die konjugierten Punkte, die in einer Gerade liegen, sind Punktpaare einer Involution; diese Involution heifst die konjugierte Punktinvolution der Gerade.*

5. *Die konjugierten Strahlen, die durch einen Punkt gehen, sind Strahlenpaare einer Involution; diese Involution heifst die konjugierte Strahleninvolution des Punktes.*

6. Die konjugierte Punktinvolution einer Gerade liegt perspektiv zu der konjugierten Strahleninvolution ihres Poles. —

Schneidet die Gerade p die Kurve in einem Punkte K, so ist die Polare von K die Tangente in K[86 Z_2]; der Punkt K ist demnach sich selbst konjugiert, also ein Ordnungspunkt[37_2] der konjugierten Involution von p.

Ist p die Tangente in K, so fällt die Polare von K mit p zusammen[86 Z_2]; jeder Punkt von p ist daher als dem Punkte K konjugiert anzusehen. Die konjugierte Punktinvolution einer Tangente ist daher parabolisch[67].

7. Jeder Kurvenpunkt ist sich selbst konjugiert; er ist daher ein Ordnungspunkt in der konjugierten Involution jeder durch ihn gehenden Gerade, insbesondere auch der Ordnungspunkt der parabolischen Involution seiner Tangente.	7. Jede Tangente ist sich selbst konjugiert; sie ist daher ein Ordnungsstrahl in der konjugierten Involution jedes in ihr liegenden Punktes, insbesondere auch der Ordnungsstrahl der parabolischen Involution ihres Berührungspunktes.

93. **Elliptische, hyperbolische und parabolische konjugierte Involutionen.** Hat die konjugierte Punktinvolution einer Gerade p zwei Ordnungspunkte K und L, so heifst das[92_1], K sowohl wie L liegt in seiner Polare; K und L sind daher[86 Z_3] Kurvenpunkte, d. h. die Gerade p schneidet die Kurve in K und L. 93

Ist die konjugierte Involution von p parabolisch, so heifst das, die Polaren aller Punkte der Gerade gehen durch den Ordnungspunkt; dieser ist also der Pol der Gerade[90_2]. Der Ordnungspunkt ist daher, weil er in seiner Polare liegt, ein Kurvenpunkt[86 Z_3] und die Gerade p eine Tangente[87 Z_3].

Wir fassen die Ergebnisse noch einmal zusammen:

Die Kurve erzeugt

in jeder Gerade eine konjugierte Punktinvolution.	*in jedem Punkte eine konjugierte Strahleninvolution.*

Ist diese konjugierte Involution

1. *elliptisch,*

so hat die Gerade keinen Punkt mit der Kurve gemeinsam;	*so geht durch den Punkt keine Tangente;*

2. *hyperbolisch,*

so schneidet die Gerade die Kurve in zwei Punkten;	*so gehen durch den Punkt zwei Tangenten;*

3. *parabolisch,*

so ist die Gerade eine Tangente.	*so liegt der Punkt auf der Kurve.*

A *Anmerkung.* Durch diesen Satz sind sämtliche Geraden und Punkte in Beziehung zur Kurve gesetzt, während wir bis jetzt nur von solchen Geraden und Punkten etwas auszusagen wufsten [52], die die Kurve in *einem* Punkte schnitten oder von denen aus sich *eine* Tangente ziehen liefs. Da wir unsere fernern Sätze auf diese konjugierten Involutionen stützen, ergiebt sich für uns nirgendwo das Bedürfnis, das aus der Algebra in die Geometrie eingedrungene Wort *imaginär* zu gebrauchen.

94 94. **Zwei Poldreiecke.** Die Punkte A einer Gerade p und ihre Polaren a sind einander projektiv [90,3]; die Polaren a schneiden daher jede Gerade p_1 in einer zur Punktreihe A projektiven Punktreihe A_1. Da A und A_1 einander konjugiert sind [92,1], so können wir sagen:

1. *Zwei gerade Punktreihen sind projektiv auf einander bezogen, wenn man den Punkten der einen die ihnen konjugierten der andern zuweist.* —

1. *Zwei gerade Strahlenbüschel sind projektiv auf einander bezogen, wenn man den Strahlen des einen die ihnen konjugierten des andern zuweist.* —

Ist $P\,Q\,R$ ein Poldreieck [85] und $P_1\,Q_1\,R_1$ ein zweites Poldreieck, so läfst sich beweisen, dafs die Punkte $Q\,R\,Q_1\,R_1$ aus P und P_1 durch projektive Strahlengruppen projiziert werden. — Da nach der Definition R der Pol von $P\,Q$ ist, so sind $P(Q)$ und $P_1\,(R)$ konjugierte Strahlen [92,1]. Ebenso sind $P(R)$ und $P_1\,(Q)$ konjugierte Strahlen und ferner $P(Q_1)$ und $P_1\,(R_1)$, $P\,(R_1)$ und $P_1\,(Q_1)$; mithin

$$P\,(Q\,R\,Q_1\,R_1) \overset{(94_1)}{\barwedge} P_1\,(R\,Q\,R_1\,Q_1) \overset{(39)}{\barwedge} P_1\,(Q\,R\,Q_1\,R_1),$$

d. h. die sechs Punkte $P\,Q\,R\,P_1\,Q_1\,R_1$ liegen in einer Kurve [42].

Da die Seiten der beiden Poldreiecke die Polaren ihrer Gegenecken sind, so ergiebt sich ebenso, dafs die sechs Seiten einem krummen Strahlenbüschel angehören:

2. Die sechs Ecken zweier Poldreiecke gehören einer krummen Punktreihe, ihre sechs Seiten einem krummen Strahlenbüschel an

oder

Es giebt immer eine Kurve, der zwei beliebige Poldreiecke eingeschrieben sind, und eine zweite Kurve, der die beiden Poldreiecke umgeschrieben sind.

95. **Konjugierte Punkte und Strahlen in den Seiten und Ecken eines Dreiecks.** Ist ABC (Fig. 63) ein beliebiges Dreieck und A_1 der Punkt der Seite BC, der der Gegenecke A konjugiert ist; sind ferner B_1 und C_1 die Punkte der Seiten CA und AB, die den Gegenecken B und C konjugiert sind, so soll bewiesen werden, daſs $A_1 B_1 C_1$ in einer Gerade liegen. 95

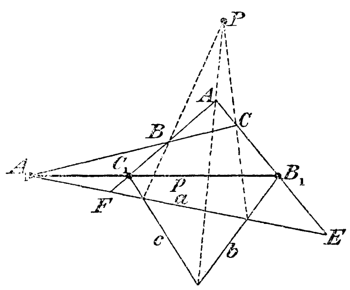

Fig. 63.

Wenn die Polare a des Punktes A, die durch A_1 geht, die Seite CA in E und die Seite AB in F schneidet, so sind den Punkten ACB_1E die Punkte FC_1BA konjugiert:

$$A\,C\,B_1\,E \overset{(94_1)}{\barwedge} F\,C_1\,B\,A \overset{(39)}{\barwedge} A\,B\,C_1\,F.$$

Es geht daher (34) $B_1\,C_1$ durch den Schnittpunkt A_1 von BC und EF:

1. Die Punkte in den Seiten eines Dreiecks, die den Gegenecken konjugiert sind, liegen in einer Gerade. —

Sind ferner b und c (Fig. 63) die Polaren der Ecken B und C des Dreiecks ABC, so bilden die drei Polaren abc ein Dreieck, dessen Seiten die Seiten des Dreiecks ABC in drei Punkten $A_1\,B_1\,C_1$ schneiden, die, wie wir eben bewiesen haben, in einer Gerade liegen. Die beiden Dreiecke ABC und abc haben daher (15) perspektive Lage:

2. Das Dreieck, das von drei beliebigen Punkten gebildet wird, liegt perspektiv zu dem Dreiseit, das von den Polaren der drei Punkte gebildet wird. —

Die Verbindungslinien homologer Ecken A und (bc), B und (ca), C und (ab) gehen durch einen Punkt P (15). Weil nun (bc) der Pol von (BC) ist (90₂), so ist $A(bc)$ der Strahl von A, der der Gegenseite BC konjugiert ist; ebenso sind $B(ca)$ und $C(ab)$ die den Gegenseiten CA und AB konjugierten Strahlen:

3. Die Strahlen in den drei Ecken eines Dreiseits,

die den Gegenseiten konjugiert sind, gehen durch einen Punkt. —

Da A_1 als Punkt von BC dem Pole bc von BC und ferner dem Punkte A konjugiert ist, so ist $A(bc)$ die Polare von A_1 $^{(92_2)}$. Ebenso ist $B(ca)$ die Polare von B_1:

4. Der Punkt P, in dem sich die den Gegenseiten konjugierten Strahlen der drei Ecken eines beliebigen Dreiecks schneiden, ist der Pol der Gerade, in der die drei Punkte der Seiten liegen, die den Gegenecken konjugiert sind.

96 96. **Satz von Hesse**$^{(217)}$. Sind A und A_1 (Fig. 64) irgend zwei konjugierte Punkte und ebenfalls B und B_1, so erhält man, wenn man die Verbindungslinien $AB = p$ und $A_1 B_1 = p_1$ zieht, in p und p_1 zwei projektive Punktreihen, wenn man den Punkten von p die ihnen konjugierten von p_1 zuordnet $^{(94_1)}$. Wenn die Polare des Schnittpunktes C von p und p_1 die Gerade p in D und p_1 in D_1 schneidet, so ist dem Punkte C in p der Punkt D und in p_1 der Punkt D_1 konjugiert$^{(92_1)}$:

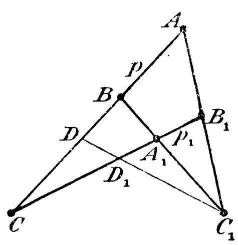

Fig. 64.

$$A\,B\,C\,D \overset{(94_1)}{\barwedge} A_1\,B_1\,D_1\,C \overset{(39)}{\barwedge} B_1\,A_1\,C\,D_1.$$

Da der Schnittpunkt C der beiden Träger sich selbst entspricht, so schneiden sich AB_1 und A_1B in einem Punkte C_1 von DD_1 $^{(34)}$, also $^{(92_1)}$ in einem dem Punkte C konjugierten Punkte. Da AA_1, BB_1, CC_1 die Gegenecken des von $p\,p_1\,(AB_1)\,(A_1B)$ gebildeten Vierseits sind, so läſst sich das Ergebnis so in Worte kleiden:

Sind zwei Ecken eines Vierseits ihren Gegenecken konjugiert, so ist auch die dritte Ecke ihrer Gegenecke konjugiert.	*Sind zwei Seiten eines Vierecks ihren Gegenseiten konjugiert, so ist auch die dritte Seite ihrer Gegenseite konjugiert.*

97 97. **Poldreieck und Kurvenviereck.** Zu einem beliebigen Punkte P und irgend einem Punkte Q seiner Polare p haben wir, ausgehend von einem beliebigen Kurvenpunkte S, in Nr. 90_1 ein Kurvenviereck gezeichnet, von dem P und Q zwei Diagonalpunkte sind. Mit Hülfe des Begriffes der konjugierten Punkte können wir den Satz Nr. 90_1 nunmehr so aussprechen:

1. *Wenn von einem Kurvenviereck zwei Gegenseiten sich in dem Punkte* P *schneiden und eine dritte Seite durch den dem Punkte* P *konjugierten Punkt* Q *geht, so geht auch die Gegenseite dieser dritten Seite durch* Q. — Die fünfte und sechste Seite gehen durch den Pol R von PQ (90₂).

1. *Wenn von einem Kurvenvierseit zwei Gegenecken in der Gerade* p *liegen und eine dritte Ecke in der der Gerade* p *konjugierten Gerade* q *liegt, so liegt auch die Gegenecke dieser dritten Ecke in* q. — Die fünfte und sechste Ecke liegen in der Polare r von $p\,q$.

Da durch die beiden konjugierten Punkte P und Q der Pol R ihrer Verbindungslinie PQ bestimmt ist, mit andern Worten, da durch zwei konjugierte Punkte ein Poldreieck bestimmt ist, so ergiebt die vorhergehende Konstruktion, *dafs es unendlich viele Kurvenvierecke giebt, von denen ein beliebiges Poldreieck ein Diagonaldreieck ist.* —

An unsere Betrachtungen schliefsen wir die (sich selbst duale)

2. Aufgabe: Eine Kurve zu zeichnen, von der ein Punkt, seine Tangente und ein Poldreieck gegeben ist.

In Zeichen: $S\sigma(PQR)$.

Ist uns ein Punkt P, seine Polare p und ein Kurvenpunkt S gegeben, so ist der von S durch P und p harmonisch getrennte Punkt S_1 ein neuer Kurvenpunkt (86₂). Wir erhalten also aus den gegebenen Stücken sofort drei

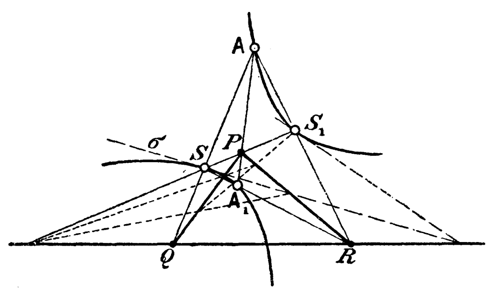

Fig. 65.

neue Kurvenpunkte. — Ein aufmerksames Verfolgen der Fig. 65 ergiebt, wie man neue Kurvenpunkte und durch sie die Kurve zeichnen kann.

Zur Übung [47 A]: $S\,S_1\,A\,(P\,p)$; $S\,S_1\,\sigma\,(P\,p)$; $S\,\sigma\,\sigma_1\,(P\,p)$; $\sigma\,\sigma_1\,\alpha\,(P\,p)$; $S\,\infty\,(P\,p)\,(Q\,q)$.

98 98. **Konjugierte gerade und krumme Involution.** Weil die Punkte einer Gerade p und die ihnen involutorisch zugeordneten einander projektiv sind[63$_7$], so erhält man durch Projektion der homologen Punkte einer geraden Involution aus zwei festen Punkten S und S_1 eine Kurve k^2[42]. — Sind Q und R (Fig. 66) zwei homologe Punkte der gegebenen geraden Involution, die wir kurz durch p^2 bezeichnen wollen, so schneiden sich $S(R)$ und $S_1(Q)$ in einem Kurvenpunkt A und $S(Q)$ und $S_1(R)$ in einem zweiten Kurvenpunkt A_1. Weil Q und R zwei Diagonalpunkte des Kurvenvierecks $S\,S_1\,\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ sind, so sind sie hinsichtlich k^2 konjugiert[92$_3$]; die Involution p^2 ist also der gezeichneten Kurve konjugiert[92$_5$]. — Die Verbindungslinie $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ schneidet $S\,S_1$ in dem dritten Diagonalpunkt P, der von p durch S und S_1 harmonisch getrennt ist[24$_3$]; P ist der Pol von $Q\,R = p$[86$_1$].

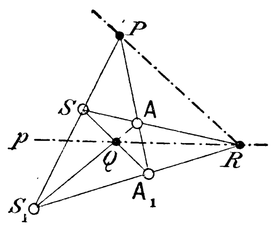

Fig. 66.

Das Ergebnis ist:

1. *Die Schnittpunkte der Strahlen, welche die homologen Punkte einer geraden Punktinvolution* p^2 *aus zwei beliebigen Punkten* S *und* S_1 *projizieren, bilden eine Kurve zweiter Ordnung; dieser Kurve ist die Involution* p^2 *konjugiert; der Pol des Trägers* p *ist der von* p *durch* S *und* S_1 *harmonisch getrennte Punkt.* —

1. *Die Verbindungslinien der Punkte, in denen die homologen Strahlen einer geraden Strahleninvolution* P^2 *zwei beliebige Geraden* s *und* s_1 *schneiden, bilden einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung; diesem Strahlenbüschel ist die Involution* P^2 *konjugiert; die Polare des Strahlenmittelpunktes* P *ist die von* P *durch* s *und* s_1 *harmonisch getrennte Gerade.* —

Zu derselben Figur, die wir hier benutzten, gelangten wir in Nr. 90, als wir nicht von der Involution p^2, sondern von der Kurve k^2 und den beiden konjugierten Punkten P und Q ausgingen. Aus der damals aufgestellten Kette von perspektiven Gliedern können wir die Umkehrungen des eben bewiesenen Satzes ablesen. Diese Umkehrungen sind zwar im Grunde nur eine Wiederholung der Polarensätze von Nr. 90; es ist aber vorteilhaft, diesen Sätzen mit Hülfe des Wortes konjugiert ein neues Gewand zu geben, da sie in diesem sich den spätern Anwendungen bequemer anpassen. —

Wir haben also die in der Kette perspektiver Gebilde[90]

$$Q \mathrel{\overset{=}{\barwedge}} S(Q) \mathrel{\overset{=}{\barwedge}} S_1(\mathsf{A}) \barwedge S(\mathsf{A}) \mathrel{\overset{=}{\barwedge}} R$$

enthaltene Aussage mit Hülfe des Wortes konjugiert aus der Zeichensprache ins Deutsche zu übersetzen.

Da $S_1(\mathsf{A})$ und $S(\mathsf{A})$ die Gerade p in den konjugierten Punkten Q und R schneiden:

2. Wir finden die konjugierte Punktinvolution einer beliebigen Gerade p, indem wir aus irgend zwei festen Kurvenpunkten S und S_1, die mit dem Pole P von p in einer Gerade liegen, die Kurvenpunkte auf p projizieren;

2. Wir finden die konjugierte Strahleninvolution eines beliebigen Punktes P, indem wir die Schnittpunkte der Kurventangenten mit irgend zwei festen Tangenten s und s_1, die sich auf der Polare p von P schneiden, mit P verbinden;

und umgekehrt:

3. Wir finden die Kurvenpunkte, indem wir die homologen Punkte der konjugierten Involution einer beliebigen Gerade p aus irgend zwei Kurvenpunkten S und S_1 projizieren, die mit dem Pole P von p in einer Gerade liegen.

3. Wir finden die Kurventangenten, indem wir die Punkte miteinander verbinden, in denen die homologen Strahlen der konjugierten Involution eines beliebigen Punktes P durch irgend zwei Tangenten s und s_1 geschnitten werden, die mit der Polare p von P durch einen Punkt gehen.

Da $S(\mathsf{A}_1)$ und $S(\mathsf{A})$ durch die konjugierten Punkte Q und R gehen und A und A_1 mit P in einer Gerade liegen:

4. Die einem Punkte P zugeordnete[82] krumme Punktinvolution wird aus jedem Kurvenpunkt durch eine Strahleninvolution projiziert, die perspektiv liegt zu der konjugierten geraden Punktinvolution der Polare p von P (Vgl. 77);

4. Die einer Gerade p zugeordnete[83] Tangenteninvolution wird von jeder Tangente in einer Punktinvolution geschnitten, die perspektiv liegt zu der konjugierten geraden Strahleninvolution des Poles P von p;

und umgekehrt:

5. Die Strahleninvolution, durch welche die konjugierte gerade Punktinvolution eines Trägers p aus einem beliebigen Kurvenpunkte projiziert wird, schneidet die Kurve in einer krummen Punktinvolution, deren Zentrum der Pol P von p ist.

5. Die Punktinvolution, welche die konjugierte gerade Strahleninvolution eines Punktes P in einer beliebigen Tangente ausschneidet, induziert eine krumme Strahleninvolution, deren Achse die Polare p von P ist.

99 **99. Konjugierte Punkte in den Seiten eines Kurvenvierecks.** Den vorstehenden Sätzen wollen wir noch eine andere, für manche Anwendungen sehr bequeme Form geben. — Von dem Kurvendreieck $S S_1 \mathsf{A}$ (Fig. 66 oder 62) sind S und A nach unserer Konstruktion(90) zwei beliebige Punkte, während S_1 durch die Bedingung bestimmt ist, dafs $S S_1$ durch den Pol P von p geht. Wir haben daher:

1. *Zwei Seiten eines Kurvendreiecks schneiden jede Gerade, die der dritten Seite konjugiert ist, in zwei konjugierten Punkten.*

1. *Zwei Ecken eines Kurvendreiseits werden aus jedem Punkte, der der dritten Ecke konjugiert ist, durch zwei konjugierte Strahlen projiziert.*

Unser Satz gilt auch für den Fall, dafs der Punkt A in den Punkt S fällt; nicht aber unsere Einkleidung, da wir in diesem Fall nicht wohl von einem Kurvendreieck sprechen können. Wir müssen also, um unsern Satz vollständig auszusprechen, noch einen Zusatz machen. Da, wenn A in S fällt, $\mathsf{A} S_1$ die Gerade ist, welche S mit dem Pole P verbindet, so können wir sagen:

2. Die Tangente und ein beliebiger Strahl eines Kurvenpunktes schneiden jede Gerade, die dem beliebigen Strahl konjugiert ist, in zwei konjugierten Punkten.

2. Der Berührungspunkt und ein beliebiger Punkt einer Tangente werden aus jedem Punkte, der dem beliebigen Punkt der Tangente konjugiert ist, durch zwei konjugierte Strahlen projiziert.

Ferner:

3. Jede Gerade, welche von zwei Seiten eines Kurvendreiecks in zwei konjugierten

3. Jeder Punkt, aus dem zwei Ecken eines Kurvendreiseits durch zwei konju-

Punkten geschnitten wird, ist der dritten Seite konjugiert(98₃). —

gierte Strahlen projiziert werden, ist der dritten Ecke konjugiert. —

Die letzten Sätze über das Dreieck benutzen wir zur Ableitung eines Viereckssatzes. — Schneidet die Gerade p die Seiten S A und S_1 A des Kurvendreiecks $S\,S_1$ A in zwei konjugierten Punkten, so ist sie der Seite $S\,S_1$ konjugiert und schneidet daher die Seiten S B und S_1 B eines zweiten Kurvendreiecks $S\,S_1$ B, das mit dem ersten die Ecken S und S_1 gemeinsam hat, in zwei konjugierten Punkten. Fassen wir die beiden Kurvendreiecke $S\,S_1$ A und $S\,S_1$ B als ein Kurvenviereck $S\,S_1$ A B auf, so sind A S und A S_1 zwei anstoſsende Seiten dieses Vierecks und B S_1 und B S die Gegenseiten dieser anstoſsenden Seiten:

4. *Wenn zwei anstoſsende Seiten eines Kurvenvierecks eine Gerade in zwei konjugierten Punkten schneiden, so schneiden auch die Gegenseiten dieser beiden anstoſsenden Seiten die Gerade in zwei konjugierten Punkten* (vgl. 215 Z).

4. *Wenn zwei anliegende Ecken eines Kurvenvierseits aus einem Punkte durch zwei konjugierte Strahlen projiziert werden, so werden auch die beiden Gegenecken dieser beiden anliegenden Ecken aus dem Punkte durch zwei konjugierte Strahlen projiziert.*

100. **Kurve durch einen Punkt und zwei konjugierte Involutionen.** Soll jedes Punktpaar einer geraden Involution g^2 aus zwei Punkten bestehen, die hinsichtlich einer Kurve k^2 einander konjugiert sind, so wollen wir diese Bedingung kurz dadurch ausdrücken, daſs wir sagen: Für eine Kurve ist eine konjugierte Involution g^2 gegeben. Hat die Involution Ordnungspunkte, so sind diese Punkte der Kurve(93), so daſs für diesen Fall unsere Bedingung gleichbedeutend ist mit der, daſs für die Kurve zwei Punkte gegeben sind. — Wir können demnach unsere Fundamentalaufgabe(46): Eine Kurve zu zeichnen, von der fünf Punkte gegeben sind, verallgemeinern zu der 100

Aufgabe: *Eine Kurve zu zeichnen, für die ein Punkt und zwei konjugierte Punktinvolutionen gegeben sind.*

In Zeichen: $S\,g^2\,h^2$.

Aufgabe: *Eine Kurve zu zeichnen, für die eine Tangente und zwei konjugierte Strahleninvolutionen gegeben sind.*

In Zeichen: $s\,G^2\,H^2$.

Analysis: Die Träger g und h (Fig. 67) der gegebenen Involutionen g^2 und h^2 mögen sich in U schneiden und dem Punkte U möge in g^2 der Punkt G und in h^2 der Punkt H homolog sein; dann ist, weil die Polare von U sowohl durch den konjugierten Punkt G als auch durch den konjugierten Punkt H gehen mufs, die Gerade $GH = u$ die Polare von U[92$_2$]; folglich ist der von S durch U und u harmonisch getrennte Punkt L ein zweiter Kurvenpunkt[86$_2$]. — Die Verbindungslinie SH möge den Träger g in C und die Kurve in dem noch unbekannten Punkte L_1 schneiden; die Verbindungslinie LG möge den Träger h in Γ und die Kurve in dem noch unbekannten Punkte S_1 schneiden. Von

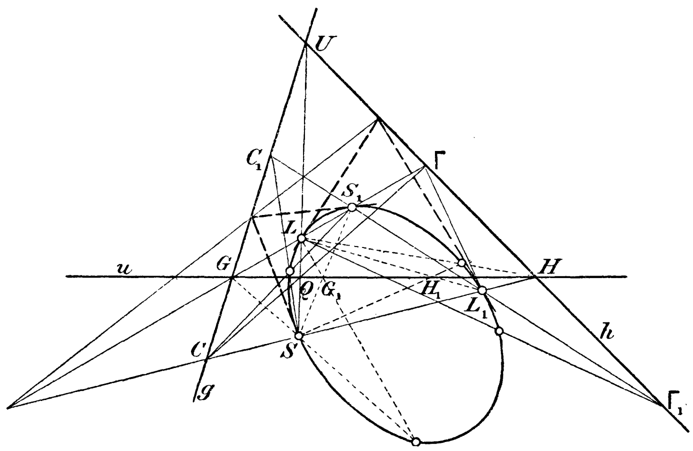

Fig. 67.

dem Kurvenviereck SS_1LL_1 gehen die beiden anstofsenden Seiten LS und LS_1 durch die beiden konjugierten Punkte U und G von g^2, die dritte Seite SL_1 geht durch C; folglich mufs die vierte (noch unbekannte) Seite S_1L_1 durch den dem Punkte C homologen Punkt C_1 von g^2 gehen[99$_4$]. Ferner gehen die beiden anstofsenden Seiten SL und SL_1 durch die konjugierten Punkte U und H von h^2, die dritte Seite LS_1 geht durch Γ; folglich mufs die vierte Seite S_1L_1 durch den dem Punkte Γ konjugierten Punkt Γ_1 von h^2 gehen. Die Kurvenpunkte S_1 und L_1 sind daher bestimmt als die Punkte, in denen LG und SH von $C_1\Gamma_1$ geschnitten werden. —

Weil die Gerade g die Seiten LS und LS_1 des Kurvendreiecks LSS_1 in zwei konjugierten Punkten U und G schneidet, so ist sie der dritten Seite konjugiert(99₃), d. h.(92₁) SS_1 geht durch den Pol von g; da ferner die Polare u von U durch den Pol von g geht(90₂), so ist der Punkt G_1, in dem SS_1 die Gerade u schneidet, der Pol von g; aus denselben Gründen ist der Punkt H_1, in dem LL_1 die Gerade u schneidet, der Pol von h. —

Da GG_1 und HH_1 konjugierte Punkte von u sind(92₁), so ist, weil eine Involution durch zwei Punktpaare bestimmt ist(63₅), durch unsere Konstruktion auch die konjugierte Involution der Gerade u gezeichnet.

Wir erhalten daher(98₃) die Punkte der gesuchten Kurve, indem wir die konjugierte Involution

$$g^2 = UG \,.\, CC_1 \text{ aus } S \text{ und } S_1 \text{ oder}$$
$$h^2 = UH \,.\, \Gamma\Gamma_1 \text{ aus } L \text{ und } L_1 \text{ oder}$$
$$GG_1 \,.\, HH_1 \text{ aus } S \text{ und } L$$

projizieren.

Konstruktion: Schneiden die Geraden, welche den gegebenen Punkt S mit den Ecken H und U des Dreiecks UGH verbinden, die Gegenseiten g und u in C und Q, schneidet ferner die Verbindungslinie CQ die Seite h in Γ, so ist der Schnittpunkt von $G\Gamma$ und $C_1\Gamma_1$, wie sich zeigen wird, ein Kurvenpunkt. Bezeichnen wir diesen durch S_1, so sind die Schnittpunkte der Strahlen, welche S und S_1 mit den homologen Punkten der Involution g^2 verbinden, die Punkte der gesuchten Kurve.

Beweis: Weil SU und S_1G, SC und S_1C_1 homologe Punkte von g^2 projizieren, so sind ihre Schnittpunkte L und L_1 Punkte der gezeichneten Kurve. — Wie das Viereck $GHC\Gamma$ zeigt, ist Q von U durch S und L harmonisch getrennt(24₂); $GQ = u$ schneidet daher SS_1 in dem von g durch S und S_1 harmonisch getrennten Punkte(21₁) G_1, d. i. im Pole von g(98₁). Da die Involution g^2 der gezeichneten Kurve konjugiert ist(98₁), so sind die homologen Punkte U und G einander konjugiert; $GG_1 = u$ ist daher die Polare von U und schneidet als solche den Träger h in dem dem Punkte U konjugierten Punkte H(92₁).

Es bleibt noch zu zeigen, daſs auch Γ dem Punkte Γ_1 konjugiert ist. Durch Projektion des harmonischen Wurfes

$S L . U Q$ aus H erkennt man, dafs $H Q = u$ die Gerade $L L_1$ in dem von h durch L und L_1 harmonisch getrennten Punkte H_1 schneidet. Weil der Punkt H_1 in u, der Polare von U, liegt, so geht seine Polare durch U und da sie ferner durch den von H_1 durch L und L_1 harmonisch getrennten Punkt geht(86₂), so ist H_1 der Pol von h. Die Polare des in h liegenden Punktes Γ geht daher durch H_1(90₂); aufserdem geht sie durch den von Γ durch S_1 und L harmonisch getrennten Punkt (86₂); die Verbindungslinie dieses Punktes mit H_1 geht aber durch Γ_1(40₁); Γ und Γ_1 sind also zwei konjugierte Punkte(92₁).

Z *Zusatz.* Für die Ausführung der Zeichnung ist noch zu bemerken, dafs die Diagonallinie des Kurvenvierecks $S S_1 L L_1$, die den Gegenseiten $S S_1$ und $L L_1$ zugeordnet ist(16 Z), die Träger g und h in den Polen der Seiten $S S_1$ und $L L_1$ schneidet(90₄), dafs unsere Konstruktion uns also auch die Tangenten(87 Z₁) in den Kurvenpunkten $S S_1 L L_1$ liefert.

A *Anmerkung.* Eine allgemeinere Lösung dieser Fundamentalaufgabe geben wir in Nr. 203 (vgl. auch 200).

101 101. **Der vierte gemeinsame Punkt zweier Kurven.** Die vorhergehende Konstruktion(100) lehrt zugleich für eine durch $S g^2 h^2$ gegebene Kurve den Pol von g (und h) finden: der Pol von g ist, wie wir sahen, der Schnittpunkt T (in der vorigen Nummer nannten wir diesen Punkt G_1) von $S S_1$ und u. Da wir diesen Schnittpunkt immer zeichnen können, so dürfen wir von jetzt an eine Kurve als gegeben ansehen durch $S g^2$ und T, also *durch einen Punkt, eine Involution und den Pol des Trägers dieser Involution:* Wir erhalten dann die Punkte der Kurve(100), indem wir die homologen Punkte der Involution g^2 aus S und dem Punkte S_1 projizieren, der von S durch g und T harmonisch getrennt ist. —

Damit haben wir dieselbe Vereinfachung vorgenommen wie in Nr. 56 Z. Nachdem wir dort gezeigt hatten, dafs man für eine durch fünf Punkte $S S_1 \mathsf{A} \mathsf{B} \Gamma$ gegebene Kurve immer den Schnittpunkt T der in S und S_1 gezogenen Tangenten konstruieren kann, durften wir eine Kurve als gegeben ansehen durch $S S_1 \mathsf{A}$ und T. Beachten wir, dafs wir nach unserer jetzigen Ausdrucksweise T den Pol der

Gerade $S S_1$[87 Z1] nennen würden und dafs S und S_1 als Ordnungspunkte einer in ihrer Verbindungslinie liegenden Involution aufgefafst werden können (vgl. 100 Analysis), so erkennen wir, dafs Nr. 56 Z einen besondern Fall unserer jetzigen Bemerkung ausspricht. —

1. *Zwei Kurven, die drei Punkte gemeinsam haben, haben noch einen vierten Punkt gemeinsam.*

1. *Zwei Kurven, die drei Tangenten gemeinsam haben, haben noch eine vierte Tangente gemeinsam.*

Konstruktion des vierten gemeinsamen Punktes: Die erste Kurve sei durch die drei gemeinsamen Punkte $S S_1$ A (Fig. 68) und den Pol T von $S S_1$ gegeben[56 Z]; für die zweite Kurve sei T_1 der Pol von $S S_1$. Ziehen wir nun $T T_1$ und projizieren die Punkte D und D_1, in denen diese Verbindungslinie die Seiten AS_1 und

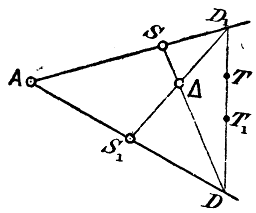

Fig. 68.

AS des gemeinsamen Kurvendreiecks $S S_1$ A schneidet, aus S und S_1, so erhalten wir[48] den vierten gemeinsamen Punkt Δ. —

2. *Zwei Kurven, die einen Punkt und eine konjugierte Punktinvolution gemeinsam haben, haben noch einen zweiten Punkt gemeinsam.*

2. *Zwei Kurven, die eine Tangente und eine konjugierte Strahleninvolution gemeinsam haben, haben noch eine zweite Tangente gemeinsam.*

Konstruktion des zweiten gemeinsamen Punktes: Die erste Kurve sei durch den gemeinsamen Punkt S (Fig. 69), die gemeinsame Involution g^2 und den Pol T von g gegeben; für die zweite Kurve sei T_1 der Pol von g. Der von S durch T und g harmonisch getrennte Punkt S_1 ist ein zweiter Punkt der ersten Kurve, deren Punkte wir erhalten, indem wir aus S und S_1 die homologen Punkte von g^2 projizieren[98₁]; ebenso erhalten wir die Punkte der zweiten Kurve, indem wir die homologen Punkte von g^2 aus S und dem von S durch T_1 und g harmonisch getrennten Punkt S_2 projizieren. Da nun die Verbindungslinien $S_1 S_2$

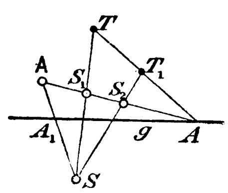

Fig. 69.

und $T T_1$ sich in einem Punkte A von g schneiden(40₁), so erhalten wir den zweiten gemeinsamen Punkt A, indem wir den Punkt A_1, welcher dem Punkt A in g^2 homolog ist, aus S projizieren; dem Strahl $S A_1$ sind nämlich die beiden zusammenfallenden Strahlen $S_1 A$ und $S_2 A$ zugeordnet. —

Aus der Konstruktion ergiebt sich unmittelbar:

3. Drei Kurven, die einen Punkt und eine konjugierte Punktinvolution gemeinsam haben, haben noch einen zweiten Punkt gemeinsam, wenn die drei Pole des Trägers der konjugierten Involution in einer Gerade liegen.	3. Drei Kurven, die eine Tangente und eine konjugierte Strahleninvolution gemeinsam haben, haben noch eine zweite Tangente gemeinsam, wenn die drei Polaren des Mittelpunktes der konjugierten Involution durch einen Punkt gehen.

A *Anmerkung.* Der erste Lehrsatz ist ein besonderer Fall des zweiten.

102 102. **Kurvenbüschel.** Die Gegenseiten $K K_1$ und $L L_1$ eines Vierecks $K K_1 L L_1$ wollen wir durch g und h bezeichnen; ihren Schnittpunkt, einen Diagonalpunkt des Vierecks, durch U; die beiden andern Diagonalpunkte durch V und W; die Verbindungslinie $V W$ durch u und die Punkte, in denen u von g und h geschnitten wird, durch G und H. Da eine Kurve erst durch vier Punkte und die Tangente des einen dieser vier Punkte(49 Z) bestimmt ist, so giebt es unendlich viele Kurven, die unserm Viereck $K K_1 L L_1$ umgeschrieben sind.

1. Definition: Der Inbegriff der Kurven, die einem Viereck umgeschrieben sind, heifst ein Kurvenbüschel. —	1. Definition: Der Inbegriff der Kurven, die einem Vierseit eingeschrieben sind, heifst eine Kurvenschar. —

Alle Kurven des Büschels haben, weil sie das Kurvenviereck gemeinsam haben, folgende Eigenschaften gemeinsam:

2. Die konjugierten Involutionen der Träger g und h sind durch die Ordnungspunkte $K K_1$ und $L L_1$ bestimmt(92₅);

3. die Diagonallinie u ist die Polare des Diagonalpunktes U(85₁);

4. die Diagonalpunkte V und W sind für alle Kurven des Büschels einander konjugiert(92₃).

Zusatz. Die Gegenseiten des Vierecks $K K_1 L L_1$ schneiden jede Gerade a in Punktpaaren einer Involution[64 Z]; z
diese Involution soll kurz die *Hauptinvolution* der Gerade a heifsen (vgl. 134 A). Die Hauptinvolution der Diagonale u, die durch die Ordnungspunkte V und W bestimmt ist, soll zum Unterschied von den übrigen die *diagonale* Involution heifsen (vgl. 133). Ein allgemeinerer Begriff des Büschels wird sich in Nr. 192 ergeben. —

103. **Lehrsatz des Desargues.** Wird eine beliebige 103
Gerade a (Fig. 70) von irgend einer Kurve des Büschels in dem Punkte E und daher[52] noch in einem zweiten Punkte F geschnitten, so läfst sich zeigen, dafs E und F zwei

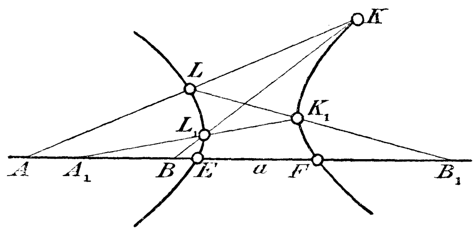

Fig. 70.

homologe Punkte der Hauptinvolution[102 Z] von a sind. — Projizieren wir die vier Kurvenpunkte $L L_1 E F$ aus K und K_1, so erhalten wir[50]

$$K(L L_1 E F) \barwedge K_1 (L L_1 E F).$$

Bezeichnen wir also die Punkte, in denen a von $K L$, $K L_1$, $K_1 L$, $K_1 L_1$ geschnitten wird, durch $A B B_1 A_1$, so haben wir

$$A B E F \barwedge B_1 A_1 E F^{(39)} \barwedge A_1 B_1 F E.$$

Da der Punkt E dem Punkte F zweifach entspricht, so bilden die sechs Punkte $A A_1 . B B_1 . E F$ eine Involution[63₄], mit andern Worten: E und F sind zwei homologe Punkte der durch $A A_1 . B B_1$ bestimmten[63₅] Hauptinvolution von a.

Wird eine Gerade a von einer Kurve des Büschels geschnitten, so sind die Schnittpunkte zwei homologe Punkte der Hauptpunktinvolution von a.

Lassen sich von einem Punkte A an eine Kurve der Schar zwei Tangenten ziehen, so sind diese Tangenten zwei homologe Strahlen der Hauptstrahleninvolution von A.

A *Anmerkung*. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes werden wir in Nr. 169 kennen lernen.

104 104. **Geraden, die durch die Gegenecken eines Vierseits harmonisch getrennt sind.** Geht eine Kurve des Büschels durch den beliebigen Punkt A (Fig. 71) der Diagonale u, so schneidet sie die Diagonale, weil V und W zwei konjugierte Punkte sind[(102₄)], zum zweiten Male in dem von A durch V und W harmonisch getrennten Punkte B[(86₂)]. Ist nun a eine beliebige durch A gehende Gerade, die die Kurve zum zweiten Mal in A schneidet, so können wir auf das Kurvendreieck $A\,B\,\mathrm{A}$ und die Gerade g den Satz Nr. 99_1 anwenden; danach wird die Gerade g, weil sie durch den Pol U der Dreiecksseite $A\,B = u$[(102₃)] geht, von $\mathrm{A}\,A$ und $\mathrm{A}\,B$ in zwei konjugierten Punkten C und C_1 geschnitten. Da h ebenfalls durch den Pol U von $A\,B$ geht, so wird h ebenfalls von $\mathrm{A}\,A$ und $\mathrm{A}\,B$ in zwei konjugierten Punkten Γ und Γ_1 geschnitten. — Da wir von einem beliebigen Punkte A ausgingen und durch ihn eine beliebige Gerade $A\,\mathrm{A}$ legten, so sehen wir, daſs den drei Punkten $C\,\Gamma\,A$, in denen eine beliebige Gerade von den beiden Gegenseiten g und h und der Diagonale u geschnitten wird, in den konjugierten Involutionen von g und h und in der diagonalen Involution drei Punkte $C_1\,\Gamma_1\,B$ homolog sind, die wieder in einer Gerade liegen. Da diese beiden Geraden durch die Punkte $C\,\Gamma$ und $C_1\,\Gamma_1$ bestimmt sind, so läſst sich das Ergebnis so aussprechen:

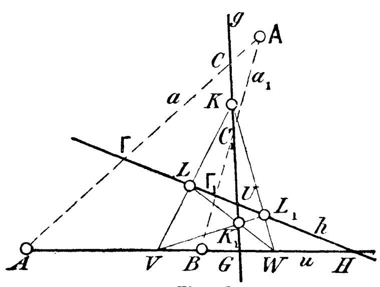

Fig. 71.

1. Zwei Geraden a und a_1, die die Gegenseiten g und h in homologen Punkten $C\,C_1$ und $\Gamma\,\Gamma_1$ der konjugierten Involution schneiden, schneiden die Diagonale u in zwei homologen Punkten A und B der diagonalen Punktinvolution. —	1. Zwei Punkte A und A_1, die aus den Gegenecken G und H durch homologe Strahlen $c\,c_1$ und $\gamma\,\gamma_1$ projiziert werden, werden aus dem Diagonalpunkte U durch zwei homologe Strahlen a und b der diagonalen Strahleninvolution projiziert. —

Weil A und A zwei Punkte sind, in denen eine Kurve des Büschels die Gerade a schneidet, so sind sie homologe Punkte der Hauptinvolution von a[103]. Da die Gerade $C_1\,\Gamma_1 = a_1$, welche wir der Gerade $C\,\Gamma = a$ zugeordnet nennen wollen, durch A geht, so haben wir den (in Nr. 134 A zu benutzenden) Satz:

2. Jede Gerade a wird von der ihr zugeordneten Gerade a_1 und der Diagonale u in zwei homologen Punkten ihrer Hauptinvolution geschnitten.

2. Aus jedem Punkte A wird der zugeordnete Punkt A_1 und der Diagonalpunkt U durch zwei homologe Strahlen der Hauptinvolution von A projiziert.

Zusatz. Der erste Satz läſst sich vom Begriff der konjugierten Involution und der Kurve loslösen. Die konjugierten Punkte (Fig. 71) $C\,C_1$ (und $\Gamma\,\Gamma_1$) werden durch die Kurvenpunkte $K\,K_1$ (und $L\,L_1$) harmonisch getrennt[92]; ebenso die konjugierten Punkte V und W[102] durch die Kurvenpunkte A und B. Wir können also die drei Punkte $C_1\,\Gamma_1\,B$ auffassen als die von a durch $K\,K_1$, $L\,L_1$, $V\,W$ harmonisch getrennten Punkte; unser Satz sagt dann aus, daſs diese drei Punkte in einer Gerade liegen. Da $K\,K_1$, $L\,L_1$, $V\,W$ die Gegenecken des von $K\,L$, $L\,K_1$, $K_1\,L_1$, $L_1\,K$ gebildeten Vierseits sind, so haben wir den Satz:

Die drei Punkte, die von einer beliebigen Gerade durch die Gegenecken eines Vierseits harmonisch getrennt sind, liegen in einer Gerade.

Die drei Geraden, die von einem beliebigen Punkte durch die Gegenseiten eines Vierecks harmonisch getrennt sind, gehen durch einen Punkt.

Wir geben für diesen Satz noch einen direkten Beweis. — Die Gegenecken des Vierseits seien $K\,K_1$, $L\,L_1$, $V\,W$, (Fig. 71), die beliebige Gerade a schneide die Diagonallinien in $C\,\Gamma\,A$, die drei von a durch die Gegenecken getrennten Punkte seien $C_1\,\Gamma_1\,B$. Wird die Gerade a von der Verbindungslinie $C_1\,\Gamma_1$ in A geschnitten, so sind $\mathrm{A}\,(C\,C_1\,.\,K\,K_1)$ und $\mathrm{A}\,(C\,C_1\,.\,L\,L_1)$ zwei harmonische Würfe, folglich[65 Z] $\mathrm{A}\,(C\,C_1\,K\,L\,K_1) \barwedge \mathrm{A}\,(C\,C_1\,K_1\,L_1\,K)$. Ferner ist, weil die Gegenecken eines Vierseits aus jedem Punkte durch die homologen Strahlen einer Involution projiziert werden[64 Z]: $\mathrm{A}\,(K\,L\,K_1\,V\,W) \barwedge \mathrm{A}\,(K_1\,L_1\,K\,W\,V)$, folglich[33 Z2] $\mathrm{A}\,(C\,C_1$

$VW) \,\overline{\wedge}\, \mathsf{A}(CC_1\; WV)$, folglich $\mathsf{A}(CC_1\,.\,VW)$ ein harmonischer Wurf (40₃). Es schneiden also $\mathsf{A}C$ und $\mathsf{A}C_1$, d. i. $C\Gamma$ und $C_1\Gamma_1$, die Diagonale u in zwei von einander durch V und W harmonisch getrennten Punkten (21₂). Da $C\Gamma$ die Diagonale in A schneidet, so geht $C_1\Gamma_1$ durch B (20₂). —

Nimmt man den besondern Fall, dafs a mit der unendlich fernen Gerade (3) zusammenfällt, so sind $C_1\,\Gamma_1\,B$ die Mitten der Strecken KK_1, LL_1, VW (27₂). Wir erkennen daraus, dafs unser Satz eine Verallgemeinerung ist von einem Satz von Gaufs: Die Mitten der drei von den Gegenecken eines Vierseits begrenzten Strecken liegen in einer Gerade.

A *Anmerkung.* Die allgemeinste Form dieses Satzes werden wir in Nr. 133 kennen lernen.

---

§ 9. Elliptische und hyperbolische Punkte und Geraden.

105 105. **Elliptische, hyperbolische, parabolische Punkte und Geraden.** In Nr. 93 haben wir gesehen, dafs eine Kurve k^2 in jeder Gerade eine konjugierte Punktinvolution und in jedem Punkt eine konjugierte Strahleninvolution induziert; diese konjugierten Involutionen konnten entweder elliptisch oder hyperbolisch oder parabolisch sein. Um die folgenden Sätze kurz aussprechen zu können, wollen wir uns folgender Bezeichnungen bedienen.

1. Definition: Eine Gerade, deren konjugierte Punktinvolution elliptisch (hyperbolisch, parabolisch) ist, nennen wir eine elliptische (hyperbolische, parabolische) Gerade.	1. Definition: Einen Punkt, dessen konjugierte Strahleninvolution elliptisch (hyperbolisch, parabolisch) ist, nennen wir einen elliptischen (hyperbolischen, parabolischen) Punkt.

Der Inhalt von Nr. 93 lautet dann:

2. Eine elliptische Gerade hat keinen Punkt, eine hyperbolische Gerade hat zwei Punkte mit der Kurve gemein; eine parabolische Gerade ist eine Tangente.	2. Durch einen elliptischen Punkt geht keine, durch einen hyperbolischen gehen zwei Tangenten; ein parabolischer Punkt ist ein Kurvenpunkt.

Da die konjugierte Involution einer Gerade perspektiv liegt zu der konjugierten Involution ihres Poles (92₆), so haben wir:

3. Jede Gerade hat einen gleichnamigen Pol.

3. Jeder Punkt hat eine gleichnamige Polare.

106. **Ecken und Seiten eines Poldreiecks.** Sind 106
Δ A B Γ vier beliebige Punkte einer Kurve, so lassen sich aus ihren drei krumme Würfe bilden (69₄): Δ A . B Γ, Δ B . Γ A, Δ Γ . A B. Nennen wir den Punkt, in dem sich z. B. die Verbindungslinien Δ A und B Γ schneiden, das *Zentrum* des Wurfes Δ A . B Γ, so sind die Zentren unserer drei Würfe die Diagonalpunkte des von Δ A B Γ gebildeten Kurvenvierecks: $P = (\Delta\,A)\,(B\,\Gamma)$, $Q = (\Delta\,B)\,(\Gamma\,A)$, $R = (\Delta\,\Gamma)\,(A\,B)$.

Jeder dieser Würfe wird aus einem beliebigen fünften Kurvenpunkte S durch einen gleichnamigen Strahlenwurf projiziert (69₃); der krumme Wurf Δ Γ . A B z. B., dessen Zentrum der Diagonalpunkt R ist, wird aus S durch den gleichnamigen Strahlenwurf $S\,(\Delta\,\Gamma\,.\,A\,B)$ projiziert. Die Strahlenpaare dieses Wurfes $S\,(\Delta\,\Gamma\,.\,A\,B)$ schneiden die Polare (85₁) $P\,Q$ des Wurfzentrums R in Punktpaaren der konjugierten Involution (98₄); der Wurf $S\,(\Delta\,\Gamma\,.\,A\,B)$ ist also der konjugierten Involution von $P\,Q$ gleichnamig (68₂). Diese konjugierte Involution von $P\,Q$ ist aber, weil R der Pol von $P\,Q$ ist, der konjugierten Strahleninvolution von R gleichnamig (105₃); also ist auch der krumme Wurf Δ Γ . A B der konjugierten Strahleninvolution seines Zentrums R gleichnamig:

1. Das Zentrum eines krummen Punktwurfes ist ein dem Wurfe gleichnamiger Punkt.

1. Die Achse eines krummen Strahlenwurfes ist eine dem Wurfe gleichnamige Gerade.

Hieraus ergiebt sich (72₇):

2. *Das Zentrum* (79) *einer krummen Punktinvolution ist ein der Involution gleichnamiger Punkt.* —

2. *Die Achse einer krummen Strahleninvolution ist eine der Involution gleichnamige Gerade.* —

Von den drei Würfen, die sich aus vier Kurvenpunkten Δ A B Γ bilden lassen, sind immer zwei hyperbolisch und einer elliptisch (69₄). Da von diesen drei Würfen die Diagonalpunkte des Kurvenvierecks die Zentren sind, so ergiebt sich aus dem ersten der eben bewiesenen Sätze der folgende:

3. Von den drei Diagonalpunkten eines Kurvenvierecks ist immer einer ein elliptischer Punkt; die beiden andern sind hyperbolische Punkte.

3. Von den drei Diagonallinien eines Kurvenvierseits ist immer eine eine elliptische Gerade; die beiden andern sind hyperbolische Geraden.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, da sich zu jedem Poldreieck ein Kurvenviereck zeichnen läſst [97]:

4. *Von den drei Ecken eines Poldreiecks ist eine Ecke ein elliptischer Punkt; die beiden andern Ecken sind hyperbolische Punkte. Die eine Seite ist daher* [105_3] *eine elliptische Gerade; die beiden andern Seiten sind hyperbolische Geraden.*

107 107. **Die Strahlen eines elliptischen Punktes.** Ist P ein *elliptischer* Punkt, so ist jeder Strahl q von P, wie wir zeigen wollen, eine hyperbolische Gerade. Schneidet nämlich der Strahl q die Polare p von P in R, so ist durch die beiden konjugierten Punkte P und R ein Poldreieck bestimmt [97], dessen dritte Ecke wir durch Q bezeichnen. Da in diesem Poldreieck PQR nach unserer Annahme P die elliptische Ecke ist, so ist p die elliptische Seite [105_3]; die Seite q ist daher eine hyperbolische Gerade [106_4]. — Ist p eine elliptische Gerade und R ein beliebiger Punkt von p, so ist R ein hyperbolischer Punkt. Ist nämlich r die Polare von R, welche p in Q schneidet, so ist $q = PR$ die Polare von Q [90_2] und $p\,q\,r$ bilden ein Poldreieck, von dem p die elliptische Seite, also P die elliptische Ecke ist; R ist daher ein hyperbolischer Punkt.

Alle Strahlen eines elliptischen Punktes sind hyperbolische Geraden; alle Punkte einer elliptischen Gerade sind hyperbolische Punkte.

108 108. **Kennzeichen für eine elliptische und eine hyperbolische Gerade.** Ist p eine beliebige Gerade und Q irgend ein Punkt von p, so wissen wir [107], daſs p eine hyperbolische Gerade ist, wenn Q ein elliptischer Punkt ist. — Ist aber Q ein hyperbolischer Punkt, so müssen wir noch irgend einen zweiten (hyperbolischen) Punkt T von p zu Hülfe nehmen. Sind die Berührungspunkte der von Q und T an die Kurve gehenden Tangenten [105_2] $K\,K_1$ und

$L L_1$, so ist der Punkt P, in dem die Berührungssehne $K K_1$ von der Berührungssehne $L L_1$ geschnitten wird, der Pol von $Q T = p$ [86 Z_1 u. 90_2]. Dieser Schnittpunkt P, und mithin [105_3] auch seine Polare p, ist aber ein elliptischer oder hyperbolischer Punkt, je nachdem der Wurf $K K_1 . L L_1$ elliptisch oder hyperbolisch ist [106_1].

Lassen sich von den Punkten Q und T die Tangenten $Q (K K_1)$ und $T (L L_1)$ an die Kurve ziehen, so schneidet die Verbindungslinie $Q T$ die Kurve nicht, wenn die Punktpaare $K K_1$ und $L L_1$ einander trennen; $Q T$ schneidet dagegen die Kurve, wenn $K K_1$ und $L L_1$ einander nicht trennen.

Schneiden die Geraden q und t die Kurve in $K K_1$ und $L L_1$, so geht durch den Schnittpunkt $q t$ keine Tangente, wenn die Punktpaare $K K_1$ und $L L_1$ einander trennen; durch $q t$ gehen dagegen zwei Tangenten, wenn die Punktpaare $K K_1$ und $L L_1$ einander nicht trennen.

109. **Kennzeichen für die Strahlen eines hyperbolischen Punktes.** Nennen wir, unter Einführung einer 109
von der bisherigen abweichenden Bezeichnung, den hyperbolischen Punkt T (Fig. 72), die Berührungspunkte der durch ihn gehenden Tangenten $s s_1$ [105_2] $S S_1$ und einen beliebigen dritten Punkt der Kurve A, so ist die Kurve gegeben durch $S S_1 \mathsf{A}$ und T [56 Z]. Jeder Strahl a von T wird, weil er durch den Pol T [87 Z_1] der Seite $S S_1$ des Kurvendreiecks $S S_1 \mathsf{A}$ geht, von den beiden andern Kurvenseiten $\mathsf{A} S_1$ und $\mathsf{A} S$ in zwei konjugierten Punkten D und D_1 geschnitten [99_1]; ferner sind der Pol T und der Punkt T_1, in dem a

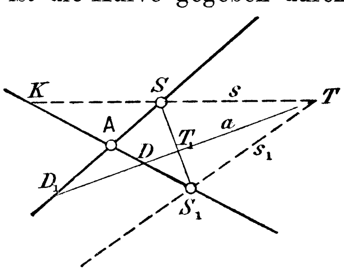

Fig. 72.

von der Polare $S S_1$ des Punktes T geschnitten wird, zwei konjugierte Punkte [92_1]. Die konjugierte Involution von a ist also gegeben durch den Wurf $D D_1 . T T_1$. — Bezeichnen wir noch den Punkt, in dem die Dreiecksseite $\mathsf{A} S_1$ die Tangente s der Gegenecke S schneidet, durch K, so haben wir [37 A]:

$$D D_1 \; T T_1 \, [S] \;\overline{\wedge}\; D \mathsf{A} K S_1 .$$

Der Wurf $DD_1 . TT_1$ ist also elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem der Wurf $D\mathsf{A} . KS_1$ elliptisch oder hyperbolisch ist[11₁], d. h. je nachdem der Strahl a des Punktes T von dem Kurvenpunkt A durch die von T ausgehenden Tangenten $s\,s_1$ getrennt oder nicht getrennt wird:

Ein Strahl a *des hyperbolischen Punktes* T *ist eine elliptische oder hyperbolische Gerade, je nachdem er von irgend einem Kurvenpunkte durch die beiden von* T *ausgehenden Tangenten* s *und* s_1 *getrennt wird oder nicht getrennt wird.*

Ein Punkt A *der hyperbolischen Gerade* t *ist ein elliptischer oder hyperbolischer Punkt, je nachdem er von irgend einer Tangente durch die beiden in* t *liegenden Kurvenpunkte* S *und* S_1 *getrennt wird oder nicht getrennt wird.*

110 110. **Trennung der elliptischen und hyperbolischen Elemente durch die Kurvenelemente.** Da nach Nr. 109 nur die Strahlen a des hyperbolischen Punktes T die Kurve schneiden, die von dem beliebigen Kurvenpunkte A durch die von T ausgehenden Tangenten s und s_1 nicht getrennt werden, so ergiebt sich, dafs es nicht zwei Kurvenpunkte giebt, die durch die Tangenten s und s_1 getrennt werden:

1. *Zwei beliebige Kurvenpunkte und zwei beliebige Tangenten bilden immer einen hyperbolischen Wurf.* —

Ist e eine beliebige elliptische und h eine beliebige hyperbolische Gerade, so ist ihr Schnittpunkt $T = eh$, als Punkt von e, ein hyperbolischer Punkt[107]; seine Tangenten seien s und s_1. Da die hyperbolische Gerade h die Kurve schneidet[105₂], so mufs e von h durch die Tangenten s und s_1 getrennt sein; denn sonst würde auch e die Kurve schneiden[109]:

2. Jede elliptische Gerade e wird von jeder hyperbolischen Gerade h getrennt durch die beiden Tangenten s und s_1, die durch den Schnittpunkt T der beiden Geraden e und h gehen.

2. Jeder elliptische Punkt E wird von jedem hyperbolischen Punkte H getrennt durch die beiden Kurvenpunkte S und S_1, die in der Verbindungslinie t der beiden Punkte E und H liegen.

111 111. **Das zweite gemeinsame Element zweier Kurven.**

Weil durch jeden Punkt einer elliptischen Gerade

Weil in jedem Strahl eines elliptischen Punktes zwei

zwei Tangenten gehen [107], so ergiebt sich aus Nr. 110_2, dafs eine Gerade x, die sich aus der elliptischen Gerade e in die hyperbolische Gerade h um den Schnittpunkt von e und h dreht, während dieser Drehung einmal mit einer Tangente (s oder s_1) zusammen fallen mufs. Da *jede* Bewegung einer Gerade x aufgefafst werden kann als zusammengesetzt aus unendlich vielen, unendlich kleinen Drehungen, so mufs die Gerade x während jeder Bewegung, durch welche sie von e nach h gelangt, mindestens einmal mit einer Tangente zusammenfallen. — Sind nun k^2 und l^2 zwei Kurven, die eine Tangente s gemeinsam haben, so ist von den beiden Tangenten u und v von k^2, welche der gemeinsamen Tangente s benachbart sind, für die zweite Kurve l^2 die eine eine elliptische, die andere eine hyperbolische Gerade. Die Tangente x kann die Kurve k^2 beschreiben in dem Sinn $u\,s\,v$ und in dem Sinn $u\,v\,s$ [69$_1$]; bei jeder Bewegung mufs sie, wie wir oben sahen, mindestens einmal mit einer Tangente der Kurve l^2 zusammenfallen. Die Kurve k^2 hat also mit der Kurve l^2 aufser s noch eine zweite Tangente gemeinsam:

Kurvenpunkte liegen [107], so ergiebt sich aus Nr. 110_2, dafs ein Punkt X, der sich von dem elliptischen Punkt E zum hyperbolischen Punkt H auf der Verbindungslinie EH bewegt, während dieser Bewegung einmal mit einem Kurvenpunkt (S oder S_1) zusammenfallen mufs. Da *jede* Bewegung eines Punktes X aufgefafst werden kann als zusammengesetzt aus unendlich vielen, unendlich kleinen geradlinigen Bewegungen, so mufs der Punkt X während jeder Bewegung, durch welche er von E nach H gelangt, mindestens einmal mit einem Kurvenpunkte zusammenfallen. — Sind nun k^2 und l^2 zwei Kurven, die einen Punkt S gemeinsam haben, so ist von den beiden Punkten U und V von k^2, welche dem gemeinsamen Kurvenpunkt S benachbart sind, für die zweite Kurve l^2 der eine ein elliptischer, der andere ein hyperbolischer Punkt. Der Punkt X kann die Kurve k^2 beschreiben im Sinne $U\,S\,V$ und im Sinne $U\,V\,S$ [69$_1$]; bei jeder Bewegung mufs er, wie wir oben sahen, mindestens einmal mit einem Punkt der Kurve l^2 zusammenfallen. Die Kurve k^2 hat also mit der Kurve l^2 aufser S noch einen zweiten Punkt gemeinsam:

Haben zwei Kurven eine Tangente gemeinsam, so haben sie noch eine zweite Tangente gemeinsam[69 A].

Haben zwei Kurven einen Punkt gemeinsam, so haben sie noch einen zweiten Punkt gemeinsam.

---

§ 10.* Konjugierte Durchmesser.

112 112.* **Zirkulare Involution.** Dreht sich ein rechter Winkel mit den Schenkeln a und l um seinen Scheitel S, so erhalten wir in S, wenn wir die Strahlen a und l homolog nennen, zwei kongruente und daher [41$_{11}$] projektive Strahlenbüschel. Diese beiden Strahlenbüschel haben involutorische Lage [63$_{4}$], weil l in a fällt, wenn a in l fällt. Die so durch die Zuordnung auf einander senkrechter Strahlen in S erhaltene Involution, die wir eine *zirkulare* nennen wollen, schneidet jede Gerade in einer Punktinvolution. Von besonderer Wichtigkeit nun ist die Punktinvolution, in der sie die uneigentliche[3] Gerade o schneidet. Konstruieren wir nämlich eine zweite zirkulare Strahleninvolution S_1, so sind je zwei homologen (auf einander senkrecht stehenden) Strahlen von S_1 zwei homologe Strahlen von S parallel; die homologen Strahlen von S_1 schneiden daher o in einem Punktpaar der von S ausgeschnittenen Involution.

Wir erhalten also immer dieselbe Punktinvolution in o, von welcher zirkularen Strahleninvolution wir auch ausgehen, so dafs wir uns die Involution o^2 als eine fest in der uneigentlichen Gerade gegebene Involution zu denken haben, die allein vom Begriff des rechten Winkels abhängig, von der Lage eines Punktes oder einer Gerade in der Ebene aber unabhängig ist und daher auch wohl die *absolute Involution* genannt wird. Uns dient sie dazu, manchen Sätzen der Planimetrie eine in unsern Sprachgebrauch besser passende Fassung zu geben.

Dafs wir immer dieselbe Involution o^2 erhalten, von welchem Punkte S wir auch ausgehen, drücken wir vermittelst einer Definition und eines Lehrsatzes aus.

1. Definition: Die Punktinvolution, in der eine beliebige zirkulare Strahleninvolution die uneigentliche Gerade schneidet, heifst die *zirkulare Punktinvolution.*

2. Lehrsatz: *Jede zirkulare Strahleninvolution liegt perspektiv zu der zirkularen Punktinvolution.* —

Da zwei auf einander senkrechte Strahlen nicht zusammenfallen können, so haben wir:

3. Jede zirkulare Involution ist elliptisch. —

4. Für uns haben die im folgenden gebrauchten Ausdrücke wie: Zwei Strahlen stehen auf einander senkrecht, immer nur die Bedeutung: *Die beiden Strahlen gehen durch zwei homologe Punkte der zirkularen Punktinvolution.*

Schneidet z. B. eine beliebige Gerade die uneigentliche Gerade o in A und ist A_1 der A homologe Punkt von o^2, so geht durch A_1 (aufser unendlich vielen eigentlichen Geraden auch) die uneigentliche Gerade o selbst.

Wir sagen daher:

5. Jede Gerade steht auf der uneigentlichen Gerade senkrecht. —

6. Stehen zwei Strahlen einer Strahleninvolution auf ihren homologen senkrecht, so steht jeder Strahl auf seinem homologen senkrecht; oder:

Eine Strahleninvolution ist zirkular, wenn zwei Strahlen auf ihren homologen senkrecht stehen.

Denn die Strahleninvolution schneidet die uneigentliche Gerade in einer Punktinvolution, die mit der zirkularen in einem Wurf übereinstimmt und daher $^{(63_5)}$ mit ihr identisch ist. —

7. Wenn in einem Viereck zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen, so steht auch die dritte Seite auf ihrer Gegenseite senkrecht.

Denn die Gegenseiten eines Vierecks schneiden jede Gerade in Punktpaaren einer Involution $^{(64\,\mathrm{Z})}$; die Involution aber, welche unser Viereck auf der uneigentlichen Gerade ausschneidet, stimmt mit der zirkularen in zwei Punktpaaren und daher $^{(63_5)}$ auch im dritten Punktpaar überein. —

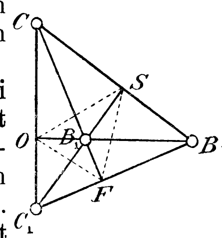

Fig. 73.

Nennen wir das Viereck, in dem zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen, $B\,B_1\,C\,C_1$ (Fig. 73) und die Diagonalpunkte $O\,S\,F$, so bilden die Strahlen $O\,(S\,F\,.\,B\,C)$ einen harmonischen Wurf $^{(24_2)}$. Da $O\,C$ senkrecht auf $O\,B$ steht, so ist $\angle\,S\,O\,B = B\,O\,F^{(28_3)}$:

8. Die Seiten eines Vierecks, in dem zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen, halbieren die Winkel des Diagonaldreiecks.

A *Anmerkung.* Die beiden letzten Sätze sind identisch mit den planimetrischen: 1. Die Höhen eines Dreiecks gehen durch einen Punkt; 2. die Fufspunkte der Höhen eines Dreiecks bilden ein zweites Dreieck, dessen Winkel von den Höhen des ersten halbiert werden.

113 **113.* Rechtwinkliges Strahlenpaar einer Involution.**

Lehrsatz: *In jeder Strahleninvolution giebt es zwei homologe Strahlen, die auf einander senkrecht stehen.*

Konstruktion des rechtwinkligen Strahlenpaares: Die Strahleninvolution S sei durch den Wurf $a\,a_1\,.\,b\,b_1$ (Fig. 74) gegeben [63$_5$]. Ein Kreis, der durch den Punkt S geht, wird, weil der Kreis eine Kurve zweiter Ordnung ist [42 Z], von der Strahleninvolution S in einer krummen Punktinvolution geschnitten, die durch die Punktpaare $A\,A_1\,.\,B\,B_1$, in denen die Strahlenpaare $a\,a_1\,.\,b\,b_1$ den Kreis schneiden, bestimmt ist. Verbinden wir das Involutionszentrum [79], den Schnittpunkt von $A\,A_1$ und $B\,B_1$, mit dem Mittelpunkt des Kreises und projizieren die Schnittpunkte dieser Verbindungslinie und des Kreises aus S durch l und l_1, so sind l und l_1 die beiden homologen Strahlen, die auf einander senkrecht stehen.

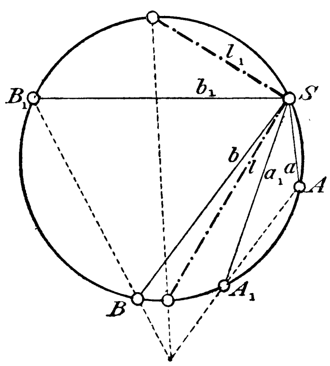

Fig. 74.

Z *Zusatz.* 1. Ist die Involution hyperbolisch, so können wir, wenn die Ordnungselemente bekannt sind, die gesuchten Strahlen bequem zeichnen: sie sind die Halbierungslinien der von den Ordnungsstrahlen gebildeten beiden Winkel. Denn diese Halbierungslinien stehen auf einander senkrecht und sind, weil sie durch die Ordnungsstrahlen harmonisch getrennt werden [28$_1$], zwei homologe Strahlen der Involution [63$_8$].

2. Ist der Mittelpunkt der Strahleninvolution ein uneigentlicher Punkt, so bildet die uneigentliche Gerade mit

der ihr homologen eigentlichen Gerade das rechtwinklige Strahlenpaar(112₆).

114.* **Konjugierte Durchmesser.** Die in § 7 bewie- 114
senen Sätze über Pol und Polare gelten allgemein für jede Gerade und ihren Pol; eine besondere Wichtigkeit haben sie aber für die unendlich ferne Gerade (3) o und ihren Pol O. Eine Reihe von Sätzen, die man in der Geometrie der Kegelschnitte zu beweisen pflegt, sind nichts anderes als Anwendungen unserer allgemeinen Sätze auf die uneigentliche Gerade. Da aber ihr Zusammenhang mit den Polareigenschaften einer Kurve durch eine von der unsrigen abweichende Ausdrucksweise verdeckt wird, so wollen wir die für die uneigentliche Gerade und ihren Pol geltenden Eigenschaften noch einmal in besondern Sätzen hervorheben. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein.

1. Die Polare eines uneigentlichen Punktes heifst ein *Durchmesser* der Kurve.

2. Der Pol der uneigentlichen Gerade, der Schnittpunkt der Durchmesser (90₂), heifst der *Mittelpunkt* der Kurve.

3. Zwei homologe Strahlen der konjugierten Strahleninvolution des Mittelpunktes heifsen *konjugierte Durchmesser* oder, mit andern Worten (92₁): Zwei Durchmesser, von denen der eine durch den Pol des andern geht, heifsen konjugiert.

4. Zwei Richtungen heifsen konjugiert, wenn sie zwei konjugierten Durchmessern parallel sind.

5. Ein Durchmesser, der die uneigentliche Gerade in einem Punkte schneidet, der mit dem Pol des Durchmessers ein Punktpaar der zirkularen Punktinvolution (112₁) bildet, heifst eine *Achse* der Kurve.

6. Jede Kurve hat zwei Achsen (113).

115.* **Beispiel.** Wie besondere Sätze aus unsern all- 115
gemeinen gewonnen werden, soll an einem Beispiel ausführlich gezeigt werden. — Ist SS_1 eine beliebige Sehne der Kurve und P_∞ ihr unendlich ferner Punkt, so geht die Polare von P_∞ 1. weil P_∞ in der unendlich fernen Gerade liegt, durch den Mittelpunkt der Kurve (90₂); 2. durch den von P_∞ durch S und S_1 harmonisch getrennten

Punkt[86,2], also durch die Mitte der Sehne $S S_1$[27,2]; 3. durch den Schnittpunkt der Tangenten in S und S_1[86,3].

Lehrsatz: Der Schnittpunkt zweier Tangenten, die Mitte ihrer Berührungssehne und der Mittelpunkt der Kurve liegen in einer Gerade.

116 116.* **Parallele Sehnen.**

1. Die Polaren der Punkte eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser[114,3] parallel[90,2]. Die Polaren der Punkte einer Achse[114,5] stehen senkrecht auf der Achse[90,2].

2. Die Mitten paralleler Sehnen liegen in einem Durchmesser[86,2]. — Jeder Durchmesser und die von ihm halbierten Sehnen haben konjugierte Richtungen[114,4].

3. Jeder Durchmesser, der die Kurve schneidet, wird durch den Mittelpunkt halbiert[86,2]; die Tangenten in den Endpunkten dieser Durchmesser sind einander[87 Z,1] und den vom Durchmesser halbierten Sehnen parallel[86,2].

4. Die Diagonalen jedes eingeschriebenen Parallelogramms schneiden sich im Mittelpunkt der Kurve[85].

5. Die Diagonalen jedes umgeschriebenen Parallelogramms sind konjugierte Durchmesser[92,3]; das zugeordnete Kurvenviereck ist ein Parallelogramm[59].

6. Zwei Seiten eines Kurvendreiecks, dessen dritte Seite ein Durchmesser ist, haben konjugierte Richtungen.

Denn die Geraden, die die Mitte der dritten Seite, den Mittelpunkt der Kurve[116,3], mit den Mitten der beiden ersten Seiten verbinden, sind den beiden ersten parallel und konjugierte Durchmesser.

117 117.* **Symmetrische Lage der Kurvenpunkte zu zwei konjugierten Durchmessern.** Sind d und d_1 zwei konjugierte Durchmesser[114,3] und S ein beliebiger Punkt der Kurve, so erhält man zwei neue Kurvenpunkte S_1 und S_2, indem man durch S Parallelen zu d und d_1 zieht und auf diesen die beiden Punkte S_1 und S_2 so bestimmt, dafs die Strecken $S S_1$ und $S S_2$ durch d_1 und d halbiert werden[86,2]. Verbindet man noch S mit dem Schnittpunkt O der Durchmesser, dem Mittelpunkt der Kurve[114,2], und nimmt auf dieser Verbindungslinie einen Punkt S_3 so an, dafs $S S_3$ durch O halbiert wird, so hat man vier Kurvenpunkte $S S_1 S_2 S_3$, die ein Parallelogramm bilden, dessen Seiten den konjugierten

Durchmessern parallel sind. Das Ergebnis drücken wir so aus:

Die Kurve liegt symmetrisch zu je zwei konjugierten Durchmessern.

118.* Parallele Tangenten. 118

Aufgabe: *Die Tangente zu zeichnen, die einer gegebenen Tangente parallel ist.*

Lösung: Die Kurve sei durch $S\,S_1\,\mathsf{A}$ und T gegeben[56 Z]. Wir wollen den Berührungspunkt der $S\,T$ parallelen Tangente zeichnen. — Wir wählen auf $S\,T$ den Punkt K so, daſs T die Mitte von $S\,K$ ist, und zeichnen zu dem Strahl $S_1\,K$ von S_1 den zugeordneten von S. Wir verbinden also[48 Z] den Punkt D_1, in dem $S_1\,K$ die Sehne $\mathsf{A}\,S$ schneidet, mit T und den Punkt D, in dem diese Verbindungslinie $D_1\,T$ die Sehne $\mathsf{A}\,S_1$ schneidet, mit S. Der Schnittpunkt Δ von $S\,D$ und $S_1\,D_1$ ist der gesuchte; denn seine Tangente wird, wie eine Anwendung von Nr. 51_2 auf das von den Tangenten in $S\,S_1\,\Delta$ gebildete Dreiseit ergiebt, von dem Strahl $\Delta\,T$ durch S und S_1 harmonisch getrennt, schneidet also die Tangente von S in dem von T durch S und K harmonisch getrennten Punkte[21$_3$], d. i. im unendlich fernen[27$_2$]. — Schneidet der Strahl $S\,D$ den Strahl $S_1\,D_1$ im unendlich fernen Punkt Δ, so ist die Tangente, weil sie den Punkt Δ mit dem unendlich fernen Punkt von $S\,T$ verbindet, die unendlich ferne Gerade. Auf diesen besondern Fall gehen wir in Nr. 127 näher ein.

Zusatz. Da sich also zu jeder Tangente eine ihr Z parallele zeichnen läſst, so können wir jede Kurve auch als bestimmt[56 Z] ansehen durch zwei Punkte, deren Tangenten sich in einem unendlich fernen Punkte T_∞ schneiden, und einen beliebigen dritten Punkt A. Bezeichnen wir die beiden ersten Punkte durch S und S_1 (nicht mehr, wie in der eben angegebenen Konstruktion, durch S und Δ), so können wir *jede Kurve als gegeben ansehen durch* $S\,S_1\,\mathsf{A}$ *und* T_∞.

Anmerkung. Bei der Zeichnung einer Kurve empfiehlt A es sich, jedesmal die der Tangente in S parallele Tangente zu zeichnen, da die Verbindungslinie ihres Berührungspunktes und des Punktes S, als Polare[86 Z$_1$] des unendlich fernen Punktes T_∞, ein Durchmesser[114$_1$] und die Mitte dieses Durchmessers der Mittelpunkt der Kurve[116$_3$] ist.

119 119.* **Achsen der Kurve.**

Aufgabe: *Die Achsen einer Kurve zu zeichnen.*

Lösung: Wir haben in der Strahleninvolution des Kurvenmittelpunktes die beiden homologen Strahlen zu zeichnen, die auf einander senkrecht stehen[114, 5]. — Ist die Kurve durch SS_1 A und $T\infty$ (Fig. 75) gegeben[118 Z], die Mitte O von SS_1 also[118 A] der Kurvenmittelpunkt, so sind $OT\infty$ und OS zwei konjugierte Durchmesser; ein zweites Paar erhalten wir, indem wir O mit den Mitten der Seiten AS_1 und AS verbinden[116, 6]. In der durch diese beiden Strahlenpaare bestimmten Involution zeichnen wir nach Nr. 113 die beiden homologen Strahlen, die auf einander senkrecht stehen (Siehe Fig. 75).

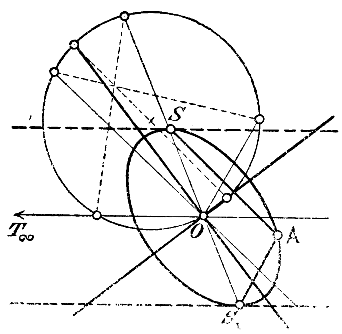

Fig. 75.

120 120.* **Definition der Ellipse und der Hyperbel.** Die konjugierte Strahleninvolution des Kurvenmittelpunktes O (oder die perspektiv zu ihr liegende[92, 6] Punktinvolution der unendlich fernen Gerade o) ist charakteristisch für die Gestalt der Kurve. Liegt O auf seiner Polare o, so ist O ein Kurvenpunkt[86 Z 3] und o seine Tangente und die konjugierte Strahleninvolution ist parabolisch[92, 7]. Wenn wir diesen Fall (den wir in Nr. 127 betrachten werden) vorläufig ausschliefsen, also annehmen, dafs O ein eigentlicher Punkt ist, so kann die Strahleninvolution des Kurvenmittelpunktes O elliptisch oder hyperbolisch sein.

1. Definition: *Eine Kurve, für welche die konjugierte Strahleninvolution des Mittelpunktes elliptisch (hyperbolisch) ist, heifst eine Ellipse (Hyperbel).*

Da die Strahleninvolution von O perspektiv liegt zu der konjugierten Punktinvolution der Polare o[92, 6], so haben wir:

2. Eine Ellipse hat keinen unendlich fernen Punkt; eine Hyperbel hat zwei unendlich ferne Punkte.

121.* Durchmesser der Ellipse und der Hyperbel. 121

1. Der Mittelpunkt der Ellipse ist ein elliptischer Punkt[105_1].

2. Jeder Durchmesser schneidet die Ellipse[107]; insbesondere: jede der beiden Achsen schneidet die Ellipse; die Schnittpunkte einer Achse mit der Ellipse heifsen Scheitel; die Tangenten in den Scheiteln einer Achse stehen senkrecht auf der Achse[87 Z_1].

3. Der Mittelpunkt der Hyperbel ist ein hyperbolischer Punkt[105_1]; die durch ihn gehenden Tangenten[105_2] heifsen *Asymptoten*. Die Berührungspunkte der Asymptoten sind die unendlich fernen Punkte der Hyperbel[86 Z_1].

4. Je zwei konjugierte Durchmesser werden durch die Asymptoten harmonisch getrennt[63_3].

5. Die beiden Geraden, welche die von den Asymptoten gebildeten Winkel halbieren, sind die Achsen der Hyperbel[113 Z_1].

6. Von zwei konjugierten Durchmessern schneidet der eine die Hyperbel, der andere nicht[110_1]; insbesondere: von den beiden Achsen schneidet die eine die Hyperbel, die andere nicht. Die Achse, welche die Hyperbel schneidet, heifst die Hauptachse; ihre Schnittpunkte mit der Hyperbel heifsen Scheitel; die Tangenten in den Scheiteln stehen senkrecht auf der Hauptachse[87 Z_1].

122.* Hyperbeltangenten. Nennen wir die beiden 122
Asymptoten der Hyperbel m und n und ihre unendlich fernen Berührungspunkte[121_3] M und N und einen beliebigen Punkt der Hyperbel A, so bilden AMN ein Kurvendreieck, von dem die eine Seite MN die unendlich ferne Gerade ist. Wenden wir auf dies Kurvendreieck den Satz Nr. 51_1 an, so ergiebt sich, dafs die Seite MN die Tangente α der gegenüberliegenden Ecke A in einem Punkte K schneidet, der von A durch m und n harmonisch getrennt ist. Da aber K der unendlich ferne Punkt von α ist, so ist A die Mitte[27_2] der Strecke, die von m und n auf α begrenzt wird:

> 1. Die Strecke, welche auf einer beliebigen Hyperbeltangente von den beiden Asymptoten begrenzt wird, wird durch den Berührungspunkt halbiert. —

Sind A und B (Fig. 76) zwei beliebige Punkte der Hyperbel, so bilden sie mit den beiden unendlich fernen Punkten M und N ein Kurvenviereck, dessen einer Diagonalpunkt R der unendlich ferne Punkt von AB ist, während die Verbindungslinie der beiden andern P und Q die Sehne AB in C halbiert[86_2]. Schneidet die Tangente α des Punktes A die drei Diagonallinien des Kurvenvierecks ABMN in den drei Punkten T, A und A_1, so ergeben die Verbindungslinien TB, AM, A_1N die Tangente β in B und die beiden Asymptoten m und n[53]. Die Tangente β schneidet die Asymptote m in einem Punkte B der Diagonallinie PR und die Asymptote n in einem Punkte B_1 der Diagonallinie QR. Da R der unendlich ferne Punkt von AB, d. h.[3] da $AB_1 \parallel$ AB $\parallel A_1B$ ist, so haben wir:

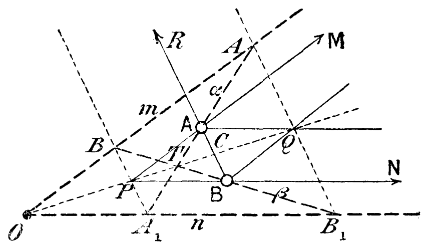

Fig. 76.

2. Die Asymptoten einer Hyperbel schneiden zwei beliebige Tangenten in den Ecken eines Trapezes, dessen Grundlinien der Berührungssehne der beiden Tangenten parallel sind. —

Aus $AB_1 \parallel A_1B$ ergiebt sich weiter: Dreieck $A_1BA = A_1BB_1$; addieren wir zu jedem dieser Dreiecke das Dreieck A_1BO, so ist $OAA_1 = OBB_1$:

3. Jede Tangente begrenzt mit den beiden Asymptoten ein Dreieck von unveränderlichem Inhalt.

123 123.* **Hyperbelsehne.** Die Diagonallinie PQ (Fig. 76), welche die Sehne AB in C halbiert[122_2], geht, weil sie der Vierecksseite MN zugeordnet ist[16 Z], durch den Schnittpunkt O der Asymptoten m und n[53], also durch den Kurvenmittelpunkt[87 Z_1]. Da ferner R der Pol der Diagonallinie PQ ist[85_1], so sind OR und OC konjugierte Durchmesser[114_3], werden also[121_4] durch die Asymptoten m und n harmonisch getrennt; C ist daher[27_2] auch die Mitte der von den Asymptoten m und n auf der Sehne AB begrenzten Strecke:

Die Mitte einer Hyperbelsehne ist zugleich die Mitte der von den Asymptoten auf der Sehne begrenzten Strecke.

124.* **Kennzeichen für die Ellipse und die Hyperbel.** 124
Ist eine Kurve durch $S S_1 \mathsf{A}$ und T_∞ gegeben(118 Z), so läſst sich ein einfaches Kennzeichen dafür angeben, ob die Kurve eine Ellipse oder Hyperbel ist. Die unendlich ferne Gerade, die durch T_∞ geht, hat nämlich mit der Kurve keinen Punkt oder zwei Punkte gemein, je nachdem sie von A durch die parallelen Tangenten s und s_1 in S und S_1 getrennt ist oder nicht(109). Ziehen wir also durch A eine beliebige Gerade, welche s und s_1 in C und D schneidet, so ist die Kurve eine Ellipse oder Tangente, je nachdem A auf CD oder auf $C^{\cdot}D$(5) liegt(11,1). Sagen wir im ersten Fall, daſs der Punkt innerhalb, im zweiten, daſs er auſserhalb der parallelen Tangenten s und s_1 liegt, so haben wir den

> Lehrsatz: Eine Kurve ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem ein beliebiger ihrer Punkte durch irgend zwei parallele Tangenten von der unendlich fernen Gerade getrennt wird oder nicht; oder mit andern Worten: je nachdem ein beliebiger Kurvenpunkt innerhalb oder auſserhalb irgend zweier parallelen Tangenten liegt.

125.* **Abschnitte auf zwei parallelen Tangenten.** 125
Ist eine Kurve durch $S S_1 \mathsf{A}$ und T_∞ (Fig. 77) gegeben(118 Z), so erhalten wir einen neuen Kurvenpunkt Δ(48 Z), indem wir irgend eine Parallele zu der Tangente $S T_\infty = s$ ziehen und die Punkte D und D_1, in denen sie von den Seiten $\mathsf{A} S_1$ und $\mathsf{A} S$ des Kurvendreiecks $\mathsf{A} S S_1$ geschnitten wird, aus S und S_1 projizieren. Bezeichnen wir noch die Punkte, in denen die Tangente s von $\mathsf{A} S_1$ und $\Delta\, S_1$ geschnitten wird, durch K und L, und die Punkte, in denen die Tangente $S_1 T_\infty = s_1$ von $\mathsf{A} S$ und $\Delta\, S$ geschnitten wird, durch K_1 und L_1, so ergiebt sich aus der Figur

$$\frac{S K}{L_1 S_1} = \frac{D S}{D L_1} = \frac{D_1 S}{D_1 K_1} = \frac{S L}{K_1 S_1},$$

folglich $S K \,.\, K_1 S_1 = S L \,.\, L_1 S_1$, folglich

$$S K \,.\, S_1 K_1 = S L \,.\, S_1 L_1 .$$

Unser Produkt hat also denselben Wert, ob wir von dem Kurvendreieck $S S_1 \mathsf{A}$ oder von dem Kurvendreieck $S S_1 \Delta$ ausgehen, mit andern Worten: *Das Produkt ist konstant.* Bezeichnen wir diesen konstanten Wert durch $\pm 4 b^2$, so lehrt die Anschauung, dafs für eine Ellipse, für welche (wie in der Figur) A innerhalb der parallelen Tangenten s und s_1 liegt[124], die Strecken SK und $S_1 K_1$ dieselbe Richtung haben, ihr Produkt also[41] positiv ist; für eine Hyperbel dagegen negativ. Um das Ergebnis bequemer in Worte kleiden zu können, bemerken wir noch, dafs die Seite AS_1 des Kurvendreiecks ASS_1 die Tangente s der Gegenecke S in einem Punkte K schneidet, der von S durch die Tangenten s_1 und α der beiden andern Ecken harmonisch ge-

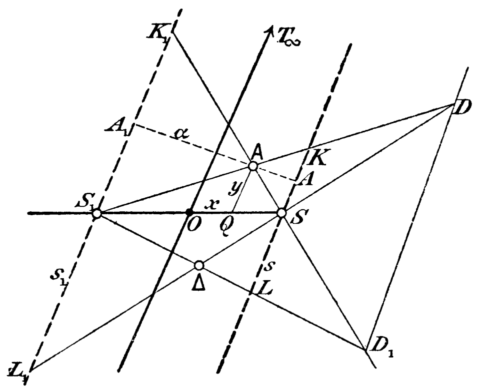

Fig. 77.

trennt wird[51_1]. Da nun s von s_1 in dem unendlich fernen Punkte T_∞ geschnitten wird, so wird s von α in der Mitte A von SK geschnitten[27_2]; ebenso ergiebt sich, dafs s_1 von α in der Mitte A_1 von $S_1 K_1$ geschnitten wird. Wir erhalten daher

$$\text{für eine Ellipse: } SA \,.\, S_1 A_1 = +\, b^2;$$
$$\text{für eine Hyperbel: } SA \,.\, S_1 A_1 = -\, b^2.$$

Lehrsatz: Das Produkt aus den Strecken, die eine veränderliche Tangente auf zwei festen parallelen Tangenten abschneidet, ist konstant, und zwar für eine Ellipse positiv, für eine Hyperbel negativ.

126 126.* **Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel.** SS_1 (Fig. 77) ist als Polare[86 Z_1] des unendlich fernen Punktes T_∞ ein Durchmesser, die Mitte O von SS_1 also der Mittelpunkt der Kurve[118 A], und OT_∞ und OS

sind zwei konjugierte Durchmesser[114_3]. Schneidet die Verbindungslinie $\mathsf{A}\,T_\infty$ den Durchmesser $S\,S_1$ in Q, so ist

$$\frac{Q\,\mathsf{A}}{S\,K} = \frac{S_1\,Q}{S_1\,S}; \quad \frac{Q\,\mathsf{A}}{S_1\,K_1} = \frac{S\,Q}{S\,S_1},$$

folglich $$\frac{Q\,\mathsf{A}^2}{S\,K\,.\,S_1\,K_1} = \frac{S\,Q\,.\,S_1\,Q}{S\,S_1\,.\,S_1\,S} = \frac{Q\,S\,.\,S_1\,Q}{S\,S_1^2}.$$

Beziehen wir den Kurvenpunkt A auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem, dessen Achsen die beiden konjugierten Durchmesser $O\,S$ und $O\,T_\infty$ sind, und bezeichnen daher $O\,Q$ durch x und $Q\,\mathsf{A}$ durch y, so ist, wenn wir noch $S\,S_1 = 2\,a$ setzen, $Q\,S\,.\,S_1\,Q = a^2 - x^2$ und ferner

für eine Ellipse: $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{a^2 - x^2}{a^2}$, folglich $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

für eine Hyperbel: $-\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{a^2 - x^2}{a^2}$, folglich $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

127.* **Parabel.** Wir wenden uns jetzt zu dem Fall, den 127
wir in Nr. 120 ausgeschlossen haben, dafs nämlich die konjugierte Strahleninvolution des Kurvenmittelpunktes parabolisch ist.

1. Definition: *Eine Kurve, für welche die konjugierte Strahleninvolution des Mittelpunktes parabolisch ist, heifst eine Parabel.*

2. Der Mittelpunkt der Parabel ist ein parabolischer Punkt[105_1] und daher[105_2] ein Kurvenpunkt.

3. Die unendlich ferne Gerade, als Polare des Mittelpunktes[114_2], ist eine Tangente der Parabel[86 Z_2]. Der Mittelpunkt, als Berührungspunkt dieser Tangente, ist ein unendlich ferner Punkt.

4. Jede Kurve, die die unendlich ferne Gerade berührt, ist eine Parabel; denn der Pol der unendlich fernen Gerade o, der Mittelpunkt[114_2] O der Kurve, ist der Berührungspunkt von o[87 Z_2]; die konjugierte Strahleninvolution eines Kurvenpunktes aber ist parabolisch[92_7].

5. Jeder Durchmesser schneidet die Parabel (im unendlich fernen Mittelpunkt und daher[52] noch) in einem eigentlichen Punkt. —

Weil die unendlich ferne Gerade eine Tangente ist, so wird die Parabel durch vier Stücke bestimmt[60 Z]:

6. Eine Parabel ist bestimmt durch 3 Punkte und den unendlich fernen (Mittel-) Punkt; durch zwei Punkte und ihre Tangenten; durch 3 Tangenten und den Berührungspunkt der einen; durch 4 Tangenten.

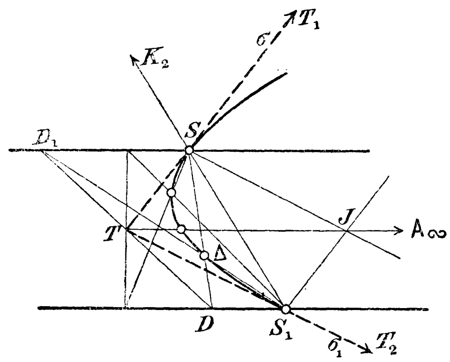

Fig. 78.

Zur Übung[47 A]: $S S_1$ A ∞ B[55]; $S \infty S_1$ A B[55]; $S S_1$ A $\infty\, \sigma$[56]; $S S_1 \sigma \sigma_1$ ([58 Z]; Fig. 78); $S \sigma \sigma_1 \beta$[61]; A $\infty\, \sigma \sigma_1 \beta$[61]; $\sigma \sigma_1 \alpha \beta$[62].

128 128.* **Die konjugierte Involution eines Parabeldurchmessers.** Ist eine Parabel durch zwei Punkte und ihre Tangenten[127_6], also durch $S S_1$ und T gegeben, so können wir, wenn wir den noch unbekannten, unendlich fernen Punkt der Parabel mit O bezeichnen, auf das Kurvendreieck $S S_1 O$ den Satz Nr. 51_1 anwenden. Danach schneidet die Seite $S_1 O$ die Tangente $S T = s$ der Gegenecke in einem Punkte K, der von S durch die Tangenten s_1 und o der beiden andern Ecken S_1 und O harmonisch getrennt wird. Da s von o im unendlich fernen Punkt geschnitten wird, so ist T die Mitte von $S K$[27_2]. Verbinden wir T mit der Mitte C von $S S_1$, so geht $T C$, weil $T C \parallel S_1 K$ ist, durch den Mittelpunkt O:

> 1. Die Gerade, welche den Schnittpunkt zweier Parabeltangenten mit der Mitte der zugeordneten Berührungssehne verbindet, ist ein Durchmesser. —

Bezeichnen wir den eigentlichen Punkt, in dem die Parabel einen Durchmesser schneidet[127_5], durch A, so sind A und der Mittelpunkt O die Ordnungspunkte der konjugierten Involution[92_7] des Durchmessers. Da je zwei konjugierte Punkte des Durchmessers durch A und O harmonisch getrennt werden [92₄], so sind sie gleich weit von A entfernt [27₂]:

2. Der eigentliche Punkt, in dem ein Durchmesser von der Parabel geschnitten wird, ist die Mitte zwischen je zwei konjugierten Punkten des Durchmessers.

129.* **Tangentendreieck.** Es seien $S\,S_1\,\mathrm{A}$ (Fig. 79) 129
drei beliebige Punkte einer Parabel, von der O der unendlich ferne Punkt sei. Auf das Kurvenviereck $S\,S_1\,\mathrm{A}\,O$ wenden wir den Satz Nr. 59 an: Das Diagonaldreieck $P\,Q\,R$ des Kurvenvierecks $S\,S_1\,\mathrm{A}\,O$ ist dasselbe wie das Diagonaldreieck des zugeordneten Kurvenvierseits $s\,s_1\,\alpha\,o$; drei Ecken dieses Vierseits sind die Punkte, in denen die drei Seiten des Diagonaldreiecks $P\,Q\,R$ von der unendlich fernen Gerade o geschnitten werden; die Gegenecken $T\,M\,M_1$ dieser drei Ecken, in denen sich die Tangenten $s\,s_1\,\alpha$ schneiden, müssen daher die Mitten [27₂] der Seiten des Diagonaldreiecks $P\,Q\,R$ sein:

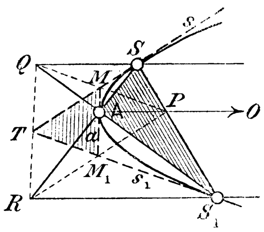

Fig. 79.

1. Die Tangenten in drei beliebigen Parabelpunkten halbieren die Diagonallinien desjenigen Kurvenvierecks, das von den drei Punkten und dem unendlich fernen Punkt der Parabel gebildet wird. —

Vermittelst dieses Lehrsatzes ergiebt sich aus der Figur:

$$\begin{array}{l}
\text{Dreieck } R\,S_1\,Q = R\,S_1\,S \\
\underline{\text{Dreieck } R\,S_1\,\mathrm{A} = R\,S_1\,\mathrm{A}} \\
\text{Dreieck } Q\,R\,\mathrm{A} = S\,S_1\,\mathrm{A} \\
\underline{\text{Dreieck } Q\,R\,\mathrm{A} = 2\,T\,M\,M_1} \\
\text{Dreieck } S\,S_1\,\mathrm{A} = 2\,T\,M\,M_1.
\end{array}$$

2. Jedes Kurvendreieck einer Parabel ist doppelt so grofs wie das zugeordnete Kurvendreiseit. —

Schalten wir zwischen S und A einen Parabelpunkt B und zwischen S_1 und A einen Parabelpunkt Γ ein und wenden auf jedes der Kurvendreiecke $S\,\mathrm{A}\,\mathrm{B}$ und $S_1\,\mathrm{A}\,\Gamma$ unsern Satz an, so erkennen wir durch unbegrenzt fortgesetztes Einschalten von Parabelpunkten, dafs die von der beliebigen Sehne $S\,S_1$ und der Parabel begrenzte Fläche doppelt so grofs ist wie das aufserhalb der Parabel liegende Flächenstück des Dreiecks $S S_1 T$:

3. Das Dreieck, welches von zwei Parabeltangenten und ihrer Berührungssehne gebildet wird, ist $\frac{3}{2}$ mal so grofs wie das zugehörige Parabelsegment.

130 130.* **Gleichung der Parabel.** Sehen wir eine Parabel als gegeben an durch $S S_1 \mathsf{A}$ und T_∞ (118 Z), so mufs, weil $S S_1$ ein Durchmesser ist (118 A), der Punkt S_1 (oder S) in den unendlich fernen Punkt O der Parabel fallen (127₅), so dafs $T_\infty O$ ($T_\infty S_1$) die unendlich ferne Gerade (3) ist. — Wir zeichnen einen vierten Kurvenpunkt Δ (48 Z), indem wir irgend zwei Punkte D und D_1 (Fig. 80) in den Seiten $\mathsf{A} O$ und $\mathsf{A} S$ des Kurvendreiecks $\mathsf{A} O S$, die mit T_∞ in einer Gerade liegen, aus S und O projizieren, und bezeichnen die Punkte, in denen die Tangente $S T_\infty$ von $O \mathsf{A}$ und $O \Delta$ geschnitten wird, durch K und K_1. Weil $K D = K_1 D_1$ ist, so ergiebt sich

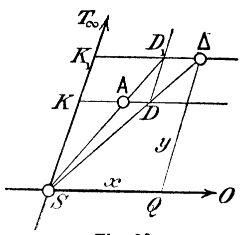

Fig. 80.

$$\frac{S K}{K \mathsf{A}} = \frac{S K_1}{K_1 D_1}; \quad \frac{S K}{K D} = \frac{S K_1}{K_1 \Delta},$$

$$\text{folglich:} \quad \frac{S K^2}{K \mathsf{A}} = \frac{S K_1{}^2}{K_1 \Delta}.$$

Ziehen wir durch Δ zur Tangente $S T_\infty$ eine Parallele, welche den Durchmesser $S O$ in Q schneidet, und bezeichnen $S Q = K_1 \Delta$ durch x und $Q \Delta = S K_1$ durch y, so ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung, dafs $Q \Delta^2 : S Q = y^2 : x$ einen konstanten Wert hat. Bezeichnen wir diesen durch $2 p$, so ist

$$y^2 = 2 p x$$

die Gleichung einer Parabel, bezogen auf ein Achsensystem, das gebildet wird von einer beliebigen Tangente und dem durch ihren Berührungspunkt gehenden Durchmesser.

131 131.* **Kreis.**

1. Definition: *Eine Kurve, für welche die konjugierte Strahleninvolution des Mittelpunktes zirkular* (112) *ist, heifst ein Kreis.*

2. Eine Kurve ist ein Kreis, wenn zwei Durchmesser auf ihren konjugierten senkrecht stehen[112$_6$].

3. Eine Kurve, der die zirkulare Punktinvolution der unendlich fernen Gerade konjugiert ist, ist ein Kreis[92$_6$ u. 112$_2$].

4. Der Mittelpunkt des Kreises ist ein elliptischer Punkt[112$_3$].

5. Der Kreis wird von jedem seiner Durchmesser geschnitten[107].

6. Zwei Seiten eines Kreisdreiecks, dessen dritte Seite ein Durchmesser ist, stehen auf einander senkrecht[116$_6$]; oder: Der Peripheriewinkel über dem Durchmesser ist ein rechter.

7. Die Durchmesser eines Kreises sind einander gleich;

denn die Strecke, welche die Mitte der Hypotenuse mit der Gegenecke verbindet, ist halb so grofs wie die Hypotenuse. —

8. Das von einem beliebigen Punkt auf seine Polare gefällte Lot geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Ist nämlich P ein beliebiger Punkt, so ist dem durch P gehenden Durchmesser OP das in O auf OP errichtete Lot konjugiert[131$_1$]; die Polare des Punktes P steht daher, weil sie durch den unendlich fernen Punkt dieses Lotes gehen mufs[90$_2$], senkrecht auf OP. —

Ein besonderer Fall des vorhergehenden Satzes ist:

9. Jede Kreistangente steht auf dem Radius ihres Berührungspunktes senkrecht;

denn die Polare eines Kreispunktes ist seine Tangente[86 Z$_2$].

132.* **Konstruktion des Kreises.** In Nr. 100 haben 132
wir eine Kurve gezeichnet, für welche ein Punkt und zwei konjugierte Involutionen gegeben sind. Ein besonderer Fall dieser Aufgabe ist die folgende

1. Aufgabe: *Einen Kreis zu zeichnen, für welchen ein Punkt und eine konjugierte Punktinvolution gegeben sind.*

Zu den gegebenen Stücken tritt noch hinzu die zirkulare Punktinvolution der unendlich fernen Gerade o[131$_3$]. Wir erhalten daher, der *Analysis* von Nr. 100 entsprechend, indem wir g^2 mit der zirkularen Punktinvolution o^2 zusammenfallen lassen, die folgende Konstruktion. — Ist dem unendlich fernen Punkte U von h der Punkt H (Fig. 81) homolog, so schneidet das in H auf h er richtete Lot die unendlich ferne Gerade o in dem dem Punkte U homologen Punkte $G^{(112_2)}$, so dafs dies Lot die Polare u von U ist$^{(92_2)}$. Von dem gegebenen Punkte S fällen wir auf u das Lot SQ und wählen auf diesem den Punkt L so, dafs Q die Mitte von SL ist; von L fällen wir auf h das Lot $L\Gamma$ und von dem Punkte Γ_1, der dem Punkte Γ in h^2 homolog ist, das Lot auf die Verbindungslinie SH, welches $L\Gamma$ in S_1 schneidet. Jeder Strahl von S wird dann durch den auf ihm senkrechten Strahl von S_1 in einem Punkte des Kreises geschnitten$^{(112_4)}$. —

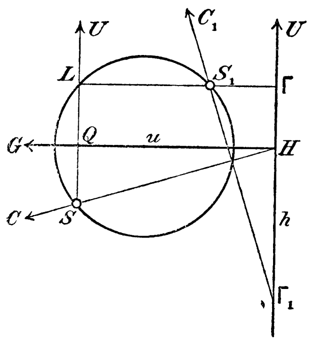

Fig. 81.

Da alle Kreise die zirkulare Punktinvolution gemeinsam haben$^{(131_3)}$, so ergiebt sich noch:

2. Zwei Kreise, die einen Punkt gemeinsam haben, haben noch einen zweiten Punkt gemeinsam$^{(101_2)}$.

3. Drei Kreise, die einen Punkt gemeinsam haben, haben noch einen zweiten Punkt gemeinsam, wenn ihre Mittelpunkte in einer Gerade liegen$^{(101_3)}$.

---

§ 11. Die diagonale Involution.

133 133. **Die diagonale Involution.** In den Trägern g und h, die sich in U schneiden, seien zwei beliebige Involutionen g^2 und h^2 gegeben. Entspricht dem Schnittpunkt U in g^2 der Punkt G und in h^2 der Punkt H, so soll die Verbindungslinie $GH = u$ die zu (gh) gehörige *Diagonallinie* heifsen. Ferner wollen wir die Involutionen g^2 und h^2 zwei *Gegenseiten* und den Schnittpunkt U ihrer Träger einen *Diagonalpunkt* nennen.

In der Diagonallinie u konstruieren wir eine Involution auf folgendem Wege. Die Involution g^2 ist gegeben, wenn aufser dem Punktpaar UG noch zwei homologe Punkte C und C_1 gegeben sind$^{(63_5)}$; ebenso ist h^2 durch den Wurf $UH.\Gamma\Gamma_1$ gegeben. Wird nun die Diagonallinie u von den

Geraden $C\Gamma$ und $C_1\Gamma_1$ in den Punkten A und B geschnitten, so soll die durch den Wurf $GH.AB$ in u bestimmte Involution die den Gegenseiten (gh) zugeordnete *diagonale Involution* heifsen.

Wir wollen beweisen, dafs die so konstruierte Involution unabhängig ist von der Wahl der Gerade $C\Gamma$. Zuerst zeigen wir, dafs jeder andern Gerade $D\Delta$, welche durch A geht, eine Gerade $D_1\Delta_1$ entspricht, welche durch B geht. — Schneidet $AD\Delta$ (Fig. 82) die Gerade $C_1\Gamma_1$ in X und die Verbindungslinie UX die Gerade $C\Gamma$ in E, so bilden $XEAB$ ein Viereck, von dem zwei Paar Gegenseiten sowohl g als h in homologen Punkten schneiden; es müssen daher[64 Z] auch die Gegenseiten AX und BE sowohl g als h in homologen Punkten schneiden; BE schneidet also g in D_1 und h in Δ_1; mit andern Worten, $D_1\Delta_1$ geht durch B. Wären wir also statt von $C\Gamma$ von $D\Delta$ ausgegangen, so hätten wir denselben Punkt B erhalten.

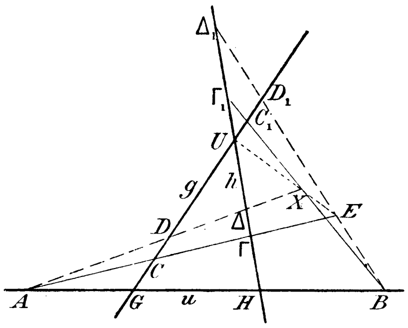

Fig. 82.

Es bleibt noch zu zeigen, dafs ein beliebiger Strahl $C\mathrm{E}$ von C und der ihm zugeordnete $C_1\mathrm{E}_1$ von C_1 die Diagonallinie u in zwei homologen Punkten A_1 und B_1 der durch $GH.AB$ bestimmten Involution schneiden. — Weil $UH.\Gamma\Gamma_1.\mathrm{E}\mathrm{E}_1$ (die Punkte E und E_1 sind in der Figur nicht mehr gezeichnet) Punktpaare der Involution h^2 sind, so ist $UH\Gamma\mathrm{E} \barwedge HU\Gamma_1\mathrm{E}_1$[63,7], folglich $C(UH\Gamma\mathrm{E}) \barwedge C_1(HU\Gamma_1\mathrm{E}_1)$, folglich $GHAA_1 \barwedge HGBB_1$. Diese Projektivität sagt aus[63,4], dafs A_1 und B_1 zwei homologe Punkte der durch $GH.AB$ bestimmten Involution sind.

Durch zwei Gegenseiten g^2 *und* h^2 *ist eine Diagonallinie* u *und in ihr eine Punktinvolution* u^2 *bestimmt. Diese den Gegenseiten* (g h) *zugeordnete diagonale Involution* u^2 *ist mit*

Durch zwei Gegenecken G^2 *und* H^2 *ist ein Diagonalpunkt* U *und in ihm eine Strahleninvolution* U^2 *bestimmt. Diese den Gegenecken* (G H) *zugeordnete diagonale Involution* U^2

den Involutionen g^2 *und* h^2 *durch die Eigenschaft verbunden, dafs je drei Punkten* C Γ A *der Träger* g h u, *die in einer Gerade liegen, drei Punkte* $C_1 \Gamma_1 B$ *homolog sind, die wieder in einer Gerade liegen.*

ist mit den Involutionen G^2 *und* H^2 *durch die Eigenschaft verbunden, dafs je drei Strahlen* c γ a *der Strahlenmittelpunkte* G H U, *die durch einen Punkt gehen, drei Strahlen* $c_1 \gamma_1$ b *homolog sind, die wieder durch einen Punkt gehen.*

Z *Zusatz.* Von dem vorstehenden Satze soll noch ein zweiter Beweis gegeben werden, da wir von den in ihm benutzten Schlüssen später[141_3 u. 169] Gebrauch zu machen haben. — Dreht sich ein Strahl a, der g und h in C und Γ und u in A schneidet, um einen beliebigen Punkt S, so beschreibt die Verbindungslinie a_1 der homologen Punkte C_1 und Γ_1 einen krummen Strahlenbüschel[42]; denn es ist

$$C_1^{(63_7)} \;\overline{\wedge}\; C \;\overline{\overline{\wedge}}\; S(C) \;\overline{\overline{\wedge}}\; \Gamma^{(63_7)} \;\overline{\wedge}\; \Gamma_1.$$

Geht der Strahl a durch $U = g\,h$, so fällt C_1 in G und Γ_1 in H, die Diagonale u ist also ein Strahl des krummen Büschels. Bezeichnen wir daher $u\,(a_1)$ durch B, so beschreiben A und B in u zwei projektive Punktreihen[50]. Wenn a durch G geht, fällt a_1 in h und daher B in H; wenn a durch H geht, fällt a_1 in g und daher B in G. *Der Punkt* G *entspricht also dem Punkt* H *zweifach,* so dafs die von A und B beschriebenen Punktreihen in involutorischer Lage sind[63_4].

Dreht sich der Strahl a um einen andern beliebigen Punkt S_1, so erhalten wir, wie sich in derselben Weise ergiebt, in u wiederum eine Involution; diese ist aber mit der ersten identisch[63_5], weil sie mit ihr aufser dem Punktpaar $G\,H$ noch ein zweites Punktpaar gemeinsam hat, dasjenige Punktpaar nämlich, welches sich ergiebt, wenn a in die Verbindungslinie $S\,S_1$ fällt.

A *Anmerkung.* Zur Begründung der eingeführten Namen weisen wir auf den besondern Fall hin, dafs die beiden Involutionen g^2 und h^2 hyperbolisch sind. Bezeichnen wir die Ordnungspunkte von g^2 durch K und K_1, die Ordnungspunkte von h^2 durch L und L_1 und den Punkt, in dem die Diagonallinie u von der Verbindungslinie $K\,L$ geschnitten wird, durch V, so mufs der Punkt V, weil K und L und daher auch die Verbindungslinie $K\,L$ sich selbst entsprechen, ein Ordnungspunkt der diagonalen Involution u^2 sein. Aus denselben Gründen mufs die Verbindungslinie $K_1 V$ den Träger h in einem sich selbst entsprechenden Punkte, also in L_1 schneiden, so dafs V ein Diagonalpunkt des von den Ordnungspunkten $K K_1 L L_1$ gebildeten Vierecks ist. Ebenso ergiebt sich, dafs der Schnittpunkt W der Gegenseiten $K L_1$ und $K_1 L$ ein Ordnungspunkt der diagonalen Involution u^2 ist. *Die drei Paar Ordnungspunkte* $\mathrm{K}\,\mathrm{K}_1$, $\mathrm{L}\,\mathrm{L}_1$, $\mathrm{V}\,\mathrm{W}$ *sind also die drei Paar Gegenecken eines Vierseits,* so dafs unser Satz eine Verallgemeinerung von Nr. 104_1 und mithin eine weitergehende Verallgemeinerung des Gaufsschen Satzes[104 Z] ist. — Den Inbegriff der beiden Involutionen g^2 und h^2 nennt man sonst wohl imaginäres Viereck; wenn wir auch diese Bezeichnung ablehnen, so haben wir doch, um keine neuen Namen bilden zu müssen, die Bezeichnungen Gegenseiten, Diagonalpunkt und Diagonallinie beibehalten.

134. **Hauptinvolution.** Eine beliebige Gerade a, welche die Gegenseiten und ihre Diagonallinie in den Punkten $C\,\Gamma\,A$ schneidet, möge von der Gerade a_1, in der die homologen Punkte $C_1\,\Gamma_1\,B$ liegen[133], in dem Punkte A geschnitten werden. Der Wurf $C\,\Gamma\,.\,A\,\mathrm{A}$ bestimmt in a eine Involution[63₅], die wir die *Hauptinvolution* der Gerade a nennen. 134

Definition: Zwei Gegenseiten g^2 und h^2 induzieren in jeder Gerade a eine Involution, die wir die den Gegenseiten $(g\,h)$ zugeordnete Hauptinvolution von a nennen. Ein Punktpaar dieser Hauptinvolution a^2 wird gebildet von den Punkten C und Γ, in denen a von g und h geschnitten wird; ein zweites von den Punkten A und A, in denen $a = C\,\Gamma$ von der Diagonallinie u und der Verbindungslinie der homologen Punkte C_1 und Γ_1 geschnitten wird.

Definition: Zwei Gegenecken G^2 und H^2 induzieren in jedem Punkte A eine Involution, die wir die den Gegenecken $(G\,H)$ zugeordnete Hauptinvolution von A nennen. Ein Strahlenpaar dieser Hauptinvolution A^2 wird gebildet von den Strahlen c und γ, welche G und H aus A projizieren; ein zweites von den Strahlen a und α, durch welche der Diagonalpunkt U und der Schnittpunkt der homologen Strahlen c_1 und γ_1 aus $A = c\,\gamma$ projiziert werden.

Zusatz. Geht die Gerade a durch U, so dafs C und Z

Γ in U liegen, so fällt C_1 in G und Γ_1 in H, die Gerade $a_1 = C_1 \Gamma_1$ also in u. Weil mithin die Punkte C und Γ, A und A zusammenfallen, so haben wir:

Geht die Gerade a durch den Diagonalpunkt U, so ist ihre Hauptinvolution hyperbolisch und hat die Ordnungspunkte U und A.

Liegt der Punkt A in der Diagonallinie u, so ist seine Hauptinvolution hyperbolisch und hat die Ordnungsstrahlen u und a.

A *Anmerkung.* Sind die Involutionen g^2 und h^2 hyperbolisch, so werden die Punkte C und C_1 durch die Ordnungspunkte K und K_1 harmonisch getrennt(63₈). Wir wissen daher aus Nr. 104_2, dafs A und A zwei homologe Punkte derjenigen Involution sind, die die Gegenseiten des Vierecks $K K_1 L L_1$ in a ausschneiden; da auch g und h zwei Gegenseiten dieses Vierecks sind, so sind auch C und Γ zwei homologe Punkte dieser Involution. *Unsere Hauptinvolution* $a^2 = C\Gamma \,.\, A\mathrm{A}$ *ist* also für den Fall, dafs g^2 und h^2 hyperbolisch sind, *identisch mit der Involution, welche durch die Gegenseiten des von den Ordnungspunkten gebildeten Vierecks in* a *ausgeschnitten wird*(102 Z).

135 135. **Darstellung zweier Gegenseiten.** Bei der grofsen Wichtigkeit, welche den Gegenseiten g^2 und h^2 und ihrer diagonalen Involution u^2 für unsere weitern Betrachtungen zukommt, ist es notwendig, sich eine klare Vorstellung zu bilden von der Figur, durch welche diese drei Involutionen dargestellt werden. — Sie besteht aus fünf Geraden (Fig. 83), die beliebig angenommen werden können: den Trägern $g\,h\,u$, die das Dreieck $U\,G\,H$ bilden, und zwei Geraden a und a_1, die die Seiten dieses Dreiecks in den Punkten $C\,\Gamma\,A$ und $C_1\,\Gamma_1\,B$, und einander in A schneiden. Die Involutionen sind dann

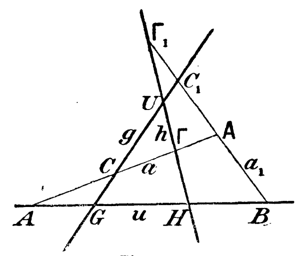

Fig. 83.

1. Gegenseiten: $g^2 = U\,G \,.\, C\,C_1$; $h^2 = U\,H \,.\, \Gamma\,\Gamma_1$;
2. Diagonale Involution: $u^2 = G\,H \,.\, A\,B$;
3. Hauptinvolutionen: $a^2 = C\,\Gamma \,.\, A\,\mathrm{A}$; $a_1^2 = C_1\,\Gamma_1 \,.\, B\,\mathrm{A}$.

A *Anmerkung.* Da zwei Gegenseiten ein Viereck darstellen(133 A), wenn sie hyperbolisch sind, so stellt unsere

Figur eine Verallgemeinerung des Vierecks dar; *sie ist daher für die folgenden Betrachtungen ebenso wichtig wie für die früheren das Viereck.*

136. **Konstruktion von homologen Punkten der diagonalen Involution.** 136 Um weitere Punktpaare der diagonalen Involution $GH.AB^{(135_2)}$ zu erhalten, legt man durch A (Fig. 84) einen beliebigen Strahl, welcher g und h in D und Δ schneidet. Die vier Punkte $C_1\,\Gamma_1\,D\,\Delta$ bilden dann ein Viereck, von dem zwei Paar Gegenseiten die Diagonallinie u in homologen Punkten schneiden; es schneiden daher$^{(64\ Z)}$ auch die Gegenseiten $C_1\,\Delta$ und $\Gamma_1\,D$ die Diagonallinie u in zwei homologen Punkten G_1 und H_1 der diagonalen Involution.

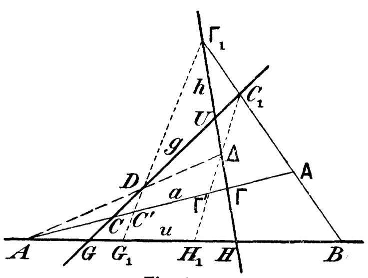

Fig. 84.

Zusatz. Da zwei Paar Gegenseiten des Vierecks $C_1\,\Gamma_1\,D\,\Delta$ z auch die Gerade $C\Gamma = a$ in homologen Punkten der Hauptinvolution $a^2 = C\Gamma\,.\,A\,\mathsf{A}^{(135_3)}$ schneiden, so schneiden die Gegenseiten $C_1\,\Delta$ und $\Gamma_1\,D$ auch die Gerade a in homologen Punkten C' und Γ' der Hauptinvolution. *Man erhält also mit den Punktpaaren der diagonalen Involution zugleich die Punktpaare der Hauptinvolution* $\mathbf{a}^2$.

137. **Ordnungspunkte zweier Gegenseiten und ihrer diagonalen Involution.** 137 Um aus einzelnen der folgenden Sätze besondere Fälle ableiten zu können, haben wir uns mit der Frage zu beschäftigen, wann die diagonale Involution Ordnungspunkte hat.

Sind die Punktwürfe $UG\,.\,CC_1$ (Fig. 83) und $UH\,.\,\Gamma\Gamma_1$ beide elliptisch, so sind auch die Strahlenwürfe $\mathsf{A}(UG\,.\,CC_1)$ und $\mathsf{A}(UH\,.\,\Gamma\Gamma_1)$ beide elliptisch$^{(11_1)}$, d. h.$^{(10_2)}$ der Strahl $\mathsf{A}(G)$ wird von dem Strahle $\mathsf{A}(U)$ durch a und a_1 getrennt und der Strahl $\mathsf{A}(H)$ wird von $\mathsf{A}(U)$ durch a und a_1 getrennt; der Strahl $\mathsf{A}(G)$ wird also von dem Strahl $\mathsf{A}(H)$ durch a und a_1 nicht getrennt; d. h. die vier Strahlen $\mathsf{A}(GH\,.\,AB)$ und mithin$^{(11_1)}$ auch die Punkte $GH\,.\,AB$ bilden einen hyperbolischen Wurf. — Sind $UG\,.\,CC_1$ und $UH\,.\,\Gamma\Gamma_1$ beide hyperbolisch, so ergiebt sich ebenso, dafs $GH.AB$ ein hyperbolischer Wurf ist.

Ist der Wurf $UG.CC_1$ elliptisch, der Wurf $UH.\Gamma\Gamma_1$ hyperbolisch, so wird $\mathsf{A}(G)$ von $\mathsf{A}(U)$ durch a und a_1 getrennt; $\mathsf{A}(H)$ dagegen wird von $\mathsf{A}(U)$ durch a und a_1 nicht getrennt; folglich wird $\mathsf{A}(G)$ von $\mathsf{A}(H)$ getrennt; der Punktwurf $GH.AB$ ist daher elliptisch:

1. Sind die Würfe, welche von zwei Geraden in zwei Seiten eines Dreiecks bestimmt werden, entweder beide elliptisch oder beide hyperbolisch, so ist der in der dritten Seite bestimmte Wurf hyperbolisch. — Ist der eine der beiden Würfe elliptisch, der andere hyperbolisch, so ist der dritte elliptisch. —

1. Sind die Würfe, welche von zwei Punkten in zwei Ecken eines Dreiseits bestimmt werden, entweder beide elliptisch oder beide hyperbolisch, so ist der in der dritten Ecke bestimmte Wurf hyperbolisch. — Ist der eine der beiden Würfe elliptisch, der andere hyperbolisch, so ist der dritte elliptisch. —

Jeder Wurf bestimmt eine Involution[63,5]; die beiden Geraden a und a_1 bestimmen daher in den drei Seiten des Dreiecks UGH drei Involutionen. Sehen wir zwei von diesen als Gegenseiten an, so ist die dritte die diagonale Involution:

2. *Wenn die beiden Gegenseiten gleichnamige (ungleichnamige) Involutionen sind, so ist die diagonale Involution hyperbolisch (elliptisch).* —

2. *Wenn die beiden Gegenecken gleichnamige (ungleichnamige) Involutionen sind, so ist die diagonale Involution hyperbolisch (elliptisch).* —

Sind die Gegenseiten und die diagonale Involution hyperbolisch, so bilden, wie wir in Nr. 133 A gesehen haben, die Ordnungspunkte die Gegenecken eines Vierseits. Wir können daher dem ersten der beiden vorhergehenden Sätze die Form geben:

3. *Zwei Geraden bestimmen in den drei Seiten eines Dreiecks drei Punktinvolutionen, von denen mindestens eine Ordnungspunkte hat. Haben alle drei Ordnungspunkte, so bilden diese die Gegenecken eines Vierseits.*

3. *Zwei Punkte bestimmen in den drei Ecken eines Dreiseits drei Strahleninvolutionen, von denen mindestens eine Ordnungsstrahlen hat. Haben alle drei Ordnungsstrahlen, so bilden diese die Gegenseiten eines Vierecks.*

138.* **Fluchtpunkt und Potenz einer Involution.** 133
Ist X der unendlich ferne Punkt einer geraden Involution g^2 und O der ihm homologe, so heifst O der *Fluchtpunkt* der Involution g^2. Sind A und A_1 irgend zwei weitere homologe Punkte von g^2, so ist die Involution g^2 elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem das Punktpaar $A A_1$ durch das Punktpaar $O X$ getrennt wird oder nicht getrennt wird[68,2]. Da X auf $A \cdot A_1$[5] liegt, so ist demnach die Involution elliptisch, wenn O auf $A A_1$ liegt; sie ist hyperbolisch, wenn O auf $A \cdot A_1$ liegt. Im ersten Falle werden die Strecken $O A$ und $O A_1$ in entgegengesetztem, im zweiten in gleichem Sinn gemessen. Das Produkt $O A . O A_1$ ist also negativ oder positiv[41], je nachdem die Involution elliptisch oder hyperbolisch ist. Und umgekehrt. —

Bezeichnen wir die unendlich ferne Gerade durch o[3] und ihre zirkulare Involution[112,1] durch o^2, so lassen sich g^2 und o^2 als zwei Gegenseiten ansehen, deren diagonale Involution wir nach Nr. 133 zeichnen wollen. Entspricht dem Schnittpunkt X (Fig. 85) der Träger g und o in g^2 der Punkt O und in o^2 der Punkt Y, so ist $O Y$ die Diagonale; weil aber $O X$ und $O Y$ durch zwei homologe Punkte X und Y der zirkularen Involution gehen, so ist $O Y$ das in O auf g errichtete Lot[112,2]. Sind nun A und A_1 irgend zwei homologe

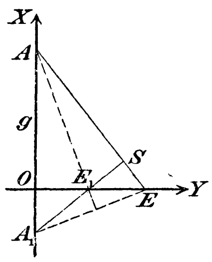

Fig. 85.

Punkte von g^2 und E und E_1 zwei homologe Punkte der diagonalen Involution, so müssen die Geraden $A E$ und $A_1 E_1$, weil sie auch die unendlich ferne Gerade in zwei homologen Punkten der zirkularen Involution schneiden[133], auf einander senkrecht stehen[112,2]. Es sind also $A A_1 E E_1$ die Ecken eines Vierecks, dessen Gegenseiten auf einander senkrecht stehen[112,7].

Da die Seiten des Dreiecks $A O E_1$ senkrecht stehen auf denen des Dreiecks $E O A_1$, also Dreieck $A O E_1 \sim E O A_1$ ist, so haben wir die Proportion $O A : O E = O E_1 : O A_1$. Da die zirkulare Involution elliptisch ist[112,3], so sind die Involution g^2 und die diagonale Involution ungleichnamig[137,2]. Von den Produkten $O A . O A_1$ und $O E . O E_1$ ist also das eine positiv, das andere negativ, so dafs sich aus unserer Proportion ergiebt:

$$OA \cdot OA_1 = -OE \cdot OE_1.$$

Halten wir die homologen Punkte E und E_1 der diagonalen Involution fest und lassen den Punkt A und damit auch A_1 den Träger g durchlaufen, so erkennen wir, dafs das Produkt $OA \cdot OA_1$ seinen Wert nicht ändert.

Lehrsatz: *Der Fluchtpunkt einer Punktinvolution teilt jede von zwei homologen Punkten begrenzte Strecke so, dass das Produkt aus den beiden Teilstrecken konstant ist. Dies konstante Produkt wird die Potenz der Involution genannt. Die Potenz einer elliptischen Involution ist negativ; die Potenz einer hyperbolischen Involution ist positiv.*

139 139.* **Konstruktion von Fluchtpunkt und Potenz.** Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Strahlen AE und $A_1 E_1$ (Fig. 85) durch S, so ist, weil die Punkte $A\,O\,E_1\,S$ in einem Kreise liegen, nach einem planimetrischen Satz $ES \cdot EA = EE_1 \cdot EO$. Das Produkt $ES \cdot EA$ bleibt also, wenn A den Träger g durchläuft, unverändert. In der Planimetrie wird das Produkt $ES \cdot EA$ die Potenz des Punktes E für den über dem Durchmesser AA_1 konstruierten Kreis genannt. Da, wie wir eben gesehen haben, für einen Kreis, der durch irgend ein anderes Punktpaar BB_1 von g^2 bestimmt ist, die Potenz des Punktes E dieselbe ist, so ist E ein Punkt der Potenzlinie der beiden über AA_1 und BB_1 als Durchmesser konstruierten Kreise. Aus dieser Bemerkung ergiebt sich, dafs die planimetrische Aufgabe: Die Potenzlinie (Chordale) zweier Kreise zu zeichnen, dazu verwandt werden kann, den Fluchtpunkt und die Potenz einer Involution g^2 zu finden (vgl. 191 Z).

1. *Elliptische Involution:* Da für zwei Kreise, die sich schneiden, die Potenzlinie die gemeinsame Sehne ist, so lässt sich für eine elliptische Involution, die durch die beiden sich trennenden Punktpaare AA_1 und BB_1 gegeben sein möge, der Fluchtpunkt durch die folgende Konstruktion bestimmen. Man schlägt über den Durchmessern AA_1 und BB_1 zwei Kreise, die sich in Q und R schneiden; die Verbindungslinie QR schneidet g in dem gesuchten Fluchtpunkt O und $-OQ^2$ ist die Potenz der Involution g^2.

2. *Hyperbolische Involution:* Ist die gegebene Involution hyperbolisch, so hat man noch einen dritten Kreis (Fig. 86), der die beiden über AA_1 und BB_1 geschlagenen Kreise schneidet, zu zeichnen und von dem Schnittpunkt der gemeinsamen Sehnen das Lot auf g zu fällen.

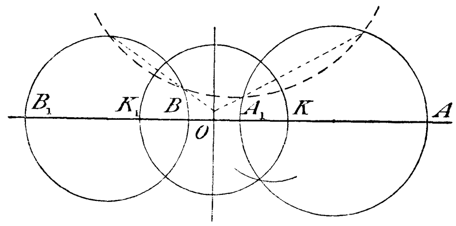

Fig 86.

3. Sind von einer hyperbolischen Involution die Ordnungspunkte K und K_1 bekannt, so ist die Mitte O von KK_1, weil O dem unendlich fernen Punkte homolog ist(63₈ und 27₂), der Fluchtpunkt und $+ OK^2$ die Potenz von g^2.

4. Ist die hyperbolische Involution durch die beiden Punktpaare AA_1 und BB_1 gegeben, so können wir mit Hülfe des Fluchtpunktes O die Ordnungspunkte finden. Ziehen wir von O (Fig. 86) die Tangente an einen der beiden über AA_1 und BB_1 konstruierten Kreise, so trifft der mit der Tangente um O geschlagene Kreis den Träger g in den Ordnungspunkten K und K_1.

5. Ist der Fluchtpunkt der hyperbolischen Involution *nicht* gegeben, so lassen sich die Ordnungspunkte finden (entweder nach Nr. 80 Z oder), indem man aus einem beliebigen Punkte S des über dem Durchmesser AA_1 geschlagenen Kreises die Punkte B und B_1 auf die Peripherie projiziert und von dem Punkte, in dem die Verbindungslinie der erhaltenen Punkte B und B₁ den Träger schneidet, Tangenten an den Kreis zieht. Projiziert man die Berührungspunkte dieser Tangenten wieder aus S auf den Träger, so erhält man die Ordnungspunkte der geraden Involution $AA_1 . BB_1$.

6. In den Anwendungen unserer Sätze auf die Geometrie des Maßes werden wir noch häufig die Potenz einer Involution, die einer Kurve konjugiert ist, zu bilden haben; an dieser Stelle wollen wir die Potenz einer dem Kreise konjugierten Involution bestimmen. — Da jedem Kreise die zirkulare Punktinvolution konjugiert ist(131₃), so ist die Polare des unendlich fernen Punktes X des Trägers g der Durchmesser, welcher senkrecht auf g steht. Nennen wir also den

Kreismittelpunkt E (Fig. 85) und fällen von ihm auf g das Lot EO, so ist O der Fluchtpunkt(92₁) der konjugierten Involution g^2. — Ist ferner A ein beliebiger Punkt von g, so geht seine Polare durch den in EO liegenden(90₄) Pol E_1 von g und steht auf dem Durchmesser AE senkrecht(131₈). Schneidet diese Polare von A den Träger g in A_1, so sind A und A_1 zwei konjugierte Punkte. Nach Nr. 138 ist daher $OA \,.\, OA_1$ die Potenz der konjugierten Involution g^2 und gleich $-\ OE \,.\, OE_1$. Nun ist(41)

$$OE \,.\, OE_1 = OE \,.\, (OE + EE_1) = OE^2 - EO \,.\, EE_1.$$

Da E der Mittelpunkt des Kreises ist, so ist die konjugierte Involution von EO hyperbolisch(131₆) und zwar gleich r^2(131₇). Von dieser konjugierten Involution sind aber, weil nach unserer Konstruktion E_1 der Pol von g ist, E_1 und O zwei konjugierte Punkte; daher ist $EO \,.\, EE_1 = r^2$. Bezeichnen wir noch den Abstand OE des Trägers g vom Kreismittelpunkt durch d, so haben wir gefunden, dafs die Potenz der dem Kreise konjugierten Involution g^2 ist

$$OA \,.\, OA_1 = r^2 - d^2.$$

---

§ 12.* Die fokale Involution.

140 140.* **Steinersche Parabel.** Ist k^2 eine beliebige Kurve und x eine ihrer beiden Achsen(119), so schneidet x die uneigentliche Gerade o in einem Punkte X, der dem Pol Y von x in der zirkularen Punktinvolution o^2 homolog ist(114₅). Jeder Strahl von Y, d. h. jede der Achse konjugierte Gerade steht daher auf der Achse senkrecht(112₄):

1. Jede einer Achse konjugierte Gerade steht auf der Achse senkrecht. —

Ist a eine beliebige Gerade (nicht etwa eine der Achsen) und A_1 ihr Pol für die Kurve k^2, so giebt es unter den durch A_1 gehenden Strahlen einen, der auf a senkrecht steht. Schneidet nämlich a die uneigentliche Gerade o im Punkte A und ist A_1 der dem Punkte A homologe Punkt in o^2, so ist die Verbindungslinie $A_1\,\mathsf{A}_1 = a_1$, weil sie durch A_1 geht, der Gerade a konjugiert und, weil sie durch A_1 geht, ein Lot auf a(112₄). Nennen wir a_1 kurz das der Gerade a *konjugierte Lot*, so haben wir:

2. Zu jeder Gerade, welche nicht mit einer der Achsen zusammenfällt, giebt es *ein* konjugiertes Lot. Ferner ergiebt sich aus Nr. 113:

3. Durch jeden Punkt gehen zwei einander konjugierte Lote. —

Geht der Strahl a durch den Kurvenmittelpunkt O, so ist sein Pol A_1 ein uneigentlicher Punkt[114,1]; die Verbindungslinie $A_1\,\mathsf{A}_1$ ist daher die uneigentliche Gerade:

4. Das einem (nicht mit einer der Achsen zusammenfallenden) Durchmesser konjugierte Lot ist die uneigentliche Gerade. —

Dreht sich a um einen Punkt P, der in keiner der beiden Achsen liegt, so beschreibt der Pol A_1 in der Polare p von P eine dem Strahlenbüschel P projektive Punktreihe[90,5] und der Punkt A_1, welcher dem Schnittpunkt $o(a) = \mathsf{A}$ in o^2 homolog ist, in o eine zu a projektive Punktreihe[63,7]. Die Verbindungslinie $A_1\,\mathsf{A}_1 = a_1$ umhüllt[60] daher eine Kurve zweiter Ordnung und zwar eine Parabel[127,4], weil o als Träger der einen Punktreihe eine Tangente ist[45]. — Liegt dagegen P z. B. in der Achse x, so ist x einer der Strahlen von P; da der Pol Y von x zugleich der dem Punkte $X = o(x)$ in o^2 homologe Punkt ist, so fallen A_1 und A_1 gleichzeitig in Y. Die beiden von A_1 und A_1 in p und o beschriebenen projektiven Punktreihen haben daher perspektive Lage[34] und die konjugierten Lote bilden zwei gerade Strahlenbüschel P_1 und Y[44]; der parabolische Büschel zerfällt, wie wir sagen, in zwei gerade Strahlenbüschel:

5. *Die den Strahlen eines geraden Büschels* P *konjugierten Lote bilden einen projektiven parabolischen Büschel. Dieser Büschel heifst die Steinersche Parabel.*

6. *Die Steinersche Parabel zerfällt in zwei gerade Strahlenbüschel, wenn* P *in einer der beiden Achsen liegt.*

141.* **Fokale Involutionen.** Geht der Strahl a des 141
Punktes P durch den uneigentlichen Punkt X der Achse x, d. h. fällt $o(a) = \mathsf{A}$ in X, so fällt A_1 in den Pol Y von x[114,5]; der Pol A_1 von a liegt, weil a durch X geht, in der Polare y von X[90,4]; die Verbindungslinie $A_1\,\mathsf{A}_1$, das konjugierte Lot, ist daher die zweite Achse y. Da dasselbe von x gilt, wenn a parallel y ist, so ergiebt sich:

1. Die beiden Achsen sind Tangenten jeder Steinerschen Parabel. —

Die einander konjugierten Lote, welche durch P gehen[140_3], sind Tangenten der dem geraden Büschel P zugeordneten Steinerschen Parabel; daher[127_6]:

2. *Die einem Punkte* P *zugeordnete Parabel ist bestimmt durch die beiden Achsen der Kurve und die beiden konjugierten Lote, welche durch* P *gehen.* —

Weil die Achsen Tangenten der Steinerschen Parabel sind, schneiden die Strahlen a des geraden Büschels P jede Achse in einer Punktreihe, die projektiv ist zu der von den homologen Strahlen des parabolischen Büschels ausgeschnittenen Punktreihe[140_5]. Geht a durch X, so ist y, wie wir eben sahen, das konjugierte Lot; dem Punkte X ist daher der Schnittpunkt $xy = O$, der Mittelpunkt der Kurve, homolog; geht der Strahl a durch O, so ist ihm die uneigentliche Gerade homolog[140_4], dem Punkt O also der Punkt X. Die beiden in x liegenden projektiven Punktreihen bilden daher[63_4] eine Involution. — Ist Q irgend ein zweiter Punkt, so ergiebt sich für ihn ebenso, daſs seine Strahlen und die ihnen konjugierten Lote die Achse in Punktpaaren einer Involution schneiden, von der X und O zwei homologe Punkte sind. Da der Strahlenbüschel Q mit dem eben betrachteten P einen Strahl gemeinsam hat (vgl. 133 Z), so haben die beiden durch P und Q in x induzierten Involutionen auch noch das Punktpaar gemeinsam, welches von diesem Strahl PQ und seinem konjugierten Lote ausgeschnitten wird; die beiden Involutionen sind daher identisch[63_5]. Das Ergebnis sprechen wir durch eine Definition und einen Lehrsatz aus.

3. Definition: Die Involution, welche durch einen beliebigen geraden Büschel und die ihm konjugierten Lote in einer Achse bestimmt wird, heiſst eine fokale Involution.

4. Lehrsatz: *Jeder Strahl und das ihm konjugierte Lot schneiden jede der beiden Achsen in zwei homologen Punkten der fokalen Involution.* —

Ist P ein Kurvenpunkt, so ist seine Tangente zugleich seine Polare[86 Z_2]; das in dem Kurvenpunkte P auf der Tangente errichtete Lot, das wir die *Normale* des Punktes P

nennen wollen, ist daher das konjugierte, so dafs wir als besondern Fall des vorhergehenden Satzes den folgenden aussprechen können:

> 5. Tangente und Normale eines Kurvenpunktes schneiden jede der beiden Achsen in zwei homologen Punkten der fokalen Involution. —

6. Ferner folgt noch für den Fall, dafs P ein Punkt einer Achse ist, der zugeordnete parabolische Büschel also in zwei gerade Büschel P_1 und Y zerfällt[140,6], dafs P und P_1 zwei homologe Punkte der fokalen Involution sind.

142.* **Brennpunkte.** Wenn die Achsen x und y von dem 142
Strahl a in B und C und von dem ihm konjugierten Lot a_1 in B_1 und C_1 geschnitten werden, so sind B und B_1 zwei homologe Punkte der fokalen Involution x^2 und C und C_1 zwei homologe Punkte der fokalen Involution y^2[141,4]. Da a und a_1 durch zwei homologe Punkte A und A_1 der zirkularen Punktinvolution gehen, so lassen sich die beiden fokalen Involutionen auffassen als zwei Gegenseiten[133], deren diagonale Involution die zirkulare Punktinvolution o^2 ist. Da die zirkulare Involution elliptisch ist[112,3], so haben wir[137,2]:

> 1. Von den beiden fokalen Involutionen ist die eine elliptisch, die andere hyperbolisch. — Die Achse, welche der Träger der hyperbolischen Involution ist, heifst die *Hauptachse*, die andere die *Nebenachse*. — Die in der Hauptachse liegenden Ordnungspunkte der fokalen Involution heifsen die *Brennpunkte* der Kurve. —

Jeder Strahl eines Brennpunktes F wird von dem ihm konjugierten Lote in F geschnitten[141,4], mit andern Worten: die konjugierten Strahlen des Brennpunktes stehen aufeinander senkrecht:

> 2. *Die konjugierte Strahleninvolution jedes Brennpunktes ist zirkular.* —

Bilden die den Strahlen eines Punktes P konjugierten Lote einen geraden Strahlenbüschel P_1, so mufs P ein Punkt der Achse sein[140,6] und der Mittelpunkt P_1 des von den konjugierten Loten gebildeten geraden Büschels mufs der dem Punkte P in der fokalen Involution homologe sein[141,6]. — Ist die konjugierte Strahleninvolution eines Punktes P zirkular, so heifst das: die den Strahlen von P

konjugierten Lote bilden einen geraden Büschel, dessen Mittelpunkt mit P zusammenfällt; der Mittelpunkt mufs also ein Ordnungspunkt der fokalen Involution, d. h. ein Brennpunkt sein:

3. Ein Punkt, dessen konjugierte Strahleninvolution zirkular ist, ist ein Brennpunkt. —

Sind uns für eine Kurve die beiden Brennpunkte F und G gegeben, so ist ihre Verbindungslinie die Hauptachse x. Da der uneigentliche Punkt X der Hauptachse x in der fokalen Involution, wie wir in der Begründung von Nr. 141_4 sahen, dem Kurvenmittelpunkt O homolog ist, so ist die Mitte$^{(63_8)}$ von FG der Kurvenmittelpunkt, das Mittellot von FG also die Nebenachse. — Je zwei aufeinander senkrechte Strahlen von F schneiden die Nebenachse in homologen Punkten der fokalen Involution$^{(141_4)}$:

4. Sind uns von einer Kurve die beiden Brennpunkte F und G gegeben, so ist FG die Hauptachse und das Mittellot von FG die Nebenachse. — Die fokale Involution der Nebenachse liegt perspektiv zur konjugierten (zirkularen) Strahleninvolution jedes Brennpunktes. —

Die konjugierten Lote, die durch einen Punkt P gehen$^{(140_3)}$, schneiden die Hauptachse in homologen Punkten der fokalen Involution$^{(141_4)}$ und bilden daher mit PF und PG einen harmonischen Wurf$^{(63_8)}$. Nennen wir die durch einen Brennpunkt gehenden Strahlen PF und PG kurz Brennstrahlen, so haben wir$^{(28_3)}$:

5. Die konjugierten Lote eines beliebigen Punktes P halbieren die von den Brennstrahlen PF und PG gebildeten Winkel.

Ein besonderer Fall dieses Satzes ist der folgende (vgl. 141_5):

6. Tangente und Normale eines Kurvenpunktes halbieren die von den Brennstrahlen des Kurvenpunktes gebildeten Winkel.

143 143.* **Hauptkreis.** Da die konjugierte Strahleninvolution des Brennpunktes zirkular$^{(142_2)}$, also elliptisch$^{(112_3)}$ ist, so ist die konjugierte Punktinvolution der Hauptachse, weil diese ein Strahl des Brennpunktes ist, hyperbolisch$^{(107)}$:

1. Die Punkte, in denen die Hauptachse die Kurve schneidet, heifsen die (Haupt-) *Scheitel*[121] der Kurve.

Wir bezeichnen die Scheitel der Kurve stets durch A und A_1 und die Strecke AA_1, die Länge der Hauptachse, durch $2a$. — Der Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Kurvenmittelpunkt O zusammenfällt und dessen Radius OA ist, hat so vielerlei Beziehungen zur Kurve, dafs man für ihn einen besonderen Namen eingeführt hat.

2. Definition: Der Kreis, welcher die Hauptachse der Kurve zum Durchmesser hat, heifst der der Kurve zugeordnete *Hauptkreis* (oder der Scheitelkreis).

3. Die der Kurve konjugierte Involution der Hauptachse ist dieselbe wie die dem Hauptkreise konjugierte Involution,

nämlich die durch die Ordnungspunkte A und A_1 bestimmte. Da ferner dem uneigentlichen Punkte X der Hauptachse x in der zirkularen Punktinvolution o^2 der Pol Y von x homolog ist[114$_5$] und jedem Kreise die zirkulare Punktinvolution konjugiert ist[131$_3$], so hat die Hauptachse für die Kurve und den Hauptkreis denselben Pol. Die Strahlen von Y, d. h.[112$_4$] die Lote der Hauptachse, haben daher für die Kurve und den Hauptkreis dieselben Pole[92$_6$].

Sind nun $Y(Q)$ (Fig. 87) und $Y(R)$ irgend zwei Strahlen von Y, und Q_1 und R_1 ihre Pole und C irgend ein Punkt in $Y(Q)$, so geht sowohl die Polare γ des Punktes C für die Kurve als auch die Polare c des Punktes C für den Kreis durch Q_1, und γ schneidet $Y(Q)$ in dem dem Punkte C für die Kurve konjugierten Punkte Γ_1 und c schneidet $Y(Q)$ in dem dem Punkte C für den Hauptkreis konjugierten Punkte C_1. Wird $Y(R)$ von γ und c in Δ_1 und D_1 geschnitten, so ist R_1C die Polare des Punktes Δ_1 für die Kurve und die Polare des Punktes D_1 für den Kreis[92$_2$]. Schneidet daher R_1C das Lot $Y(R)$ in D, so sind D und Δ_1 einander für die Kurve und D und D_1 einander für den Hauptkreis konjugiert. Da die Punkte Q und R, welche dem Punkte Y sowohl für die Kurve wie

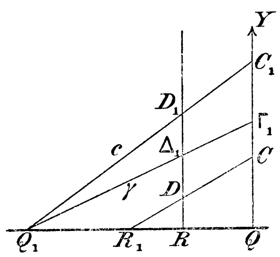

Fig. 87.

für den Kreis konjugiert sind, die Fluchtpunkte der konjugierten Involutionen von $Y(Q)$ und $Y(R)$ sind, so haben wir in $Y(Q)$ für die Kurve die Potenz $QC \,.\, Q\Gamma_1$[138] und für den Hauptkreis die Potenz $QC \,.\, QC_1$; das Verhältnis der beiden Potenzen ist also $Q\Gamma_1 : QC_1$. Entsprechend haben wir in $Y(R)$ die Potenzen $RD \,.\, R\Delta_1$ und $RD \,.\, RD_1$ und das Verhältnis $R\Delta_1 : RD_1$. Da nun nach einem Satz der Proportionenlehre

$$Q\Gamma_1 : QC_1 = R\Delta_1 : RD_1$$

ist, so haben wir:

4. *Die Potenzen der Involutionen, welche der Kurve und ihrem Hauptkreise in einem Lote der Hauptachse konjugiert sind, haben ein konstantes Verhältnis.*

Zu den Loten der Hauptachse gehört auch die Nebenachse[142_4], in welcher der Hauptkreis eine Involution erzeugt, deren Potenz $+a^2$ ist[139_3]. Bezeichnen wir die Involutionspotenz, welche die Kurve in der Nebenachse induziert, durch $[b]$, so ist das konstante Verhältnis der Involutionspotenzen $[b] : a^2$. — Wählen wir ein Lot $Y(Q)$, welches die Kurve in S schneidet, so ist, wenn wir $QS = y$ und $OQ = x$ setzen, die Potenz dieses Lotes für die Kurve $+y^2$[139_3] und für den Hauptkreis $a^2 - x^2$[139_6]. Es ist daher $y^2 : a^2 - x^2 = [b] : a^2$. — Damit haben wir zum zweiten Male (vgl. 126) die Kurvengleichung abgeleitet, und zwar für ein Koordinatensystem, dessen Achsen mit den Kurvenachsen zusammenfallen. Ist die Kurve eine Ellipse, so schneidet die Nebenachse die Kurve[121_2], die Potenz $[b]$ ist also positiv: $+b^2$[139_3]; ist sie eine Hyperbel, so ist $[b]$ negativ: $-b^2$[121_6], so daſs sich ergiebt als Gleichung

$$\text{für die Ellipse: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$\text{für die Hyperbel: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

z *Zusatz.* Die eben entwickelte Kurvengleichung ist nur ein besonderer Fall der in Nr. 126 abgeleiteten, welche auf zwei beliebige konjugierte Durchmesser als Achsen bezogen war. Auch diese allgemeine Gleichung läſst sich mit Hülfe des hier verwendeten Begriffs der Potenz einer Involution ableiten. — Ist uns die Kurve durch SS_1A und $T\infty$[118 Z] gegeben, so ist, wenn O die Mitte von $S S_1$ ist, $O T\infty$ (Fig. 88) der dem Durchmesser $S S_1$ konjugierte. Er wird, weil er durch den Pol $T\infty$ der Seite $S S_1$ des Kurvendreiecks $S S_1 \mathsf{A}$ geht, von den beiden andern Seiten $\mathsf{A} S$ und $\mathsf{A} S_1$ in zwei konjugierten Punkten A und A_1 geschnitten[99,1]. Da O der Fluchtpunkt[138] von $O T\infty$ ist, so ist die Potenz der konjugierten Involution von $O T\infty : [b] = O A \,.\, O A_1$. Ziehen wir $Q \mathsf{A}$ parallel $O T\infty$ und bezeichnen $O Q$ durch x, $Q \mathsf{A}$ durch y und $O S_1 = - O S$ durch a, so ergiebt sich:

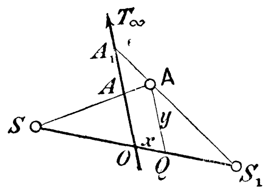

Fig. 88.

$$Q \mathsf{A} : O A = S Q : S O \text{ und } Q \mathsf{A} : O A_1 = S_1 Q : S_1 O,$$

woraus unter Berücksichtigung der Zeichenregel[41] folgt:

$$\frac{y^2}{[b]} = \frac{(S O + O Q)(S_1 O + O Q)}{O S_1 \,.\, O S} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}.$$

144.* **Konstruktion der Ellipse aus ihren beiden Achsen**[157]. Für eine Ellipse[121,1] sowohl wie für einen Kreis[131,1] 144
ist der Mittelpunkt O ein elliptischer Punkt. Es ist also, wenn wir die Bezeichnung der vorigen Nummer (Fig. 87) beibehalten, $Y(O)$ eine hyperbolische Gerade[107] und folglich[110,1] auch jeder Strahl $Y(Q)$, der von $Y(O)$ durch die Scheiteltangenten $Y(A)$ und $Y(A_1)$ *nicht* getrennt wird; mit andern Worten: jedes in einem Punkte der Hauptachse $A A_1$[5] errichtete Lot schneidet sowohl die Ellipse wie ihren Hauptkreis. Errichten wir in einem solchen auf $A A_1$ liegenden Punkte Q das Lot und nennen seine Schnittpunkte mit der Ellipse und dem Hauptkreise P und P_1, so sind $Q P^2$ und $Q P_1^2$ die Potenzen[139,3] der der Ellipse und dem Hauptkreise konjugierten Involutionen des Lotes; es ist daher[143,4] $QP : QP_1 = b : a$.

> Auf jedem Lote der Hauptachse werden von der Ellipse und ihrem Hauptkreise zwei Sehnen begrenzt, deren Verhältnis konstant ist, und zwar gleich dem Verhältnis der Nebenachse zur Hauptachse.

Ziehen wir durch den Ellipsenpunkt P (Fig. 89) zum Kreisradius $P_1 O$ die Parallele, welche die Hauptachse in C, die Nebenachse in D schneidet, so ist $PC : P_1 O = QP : QP_1 = b : a$; folglich ist, da $P_1 O = a$ ist, $PC = b$. PD ist gleich $P_1 O = a$. Daraus ergiebt sich eine in der Darstellenden Geometrie viel benutzte Konstruktion einer Ellipse, von der die beiden Achsen gegeben sind:

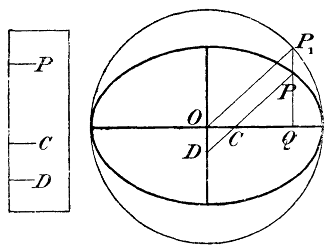

Fig. 89.

Man trägt auf einem Papierstreifen (Fig. 89) $PD = a$ und $PC = b$ ab und bewegt ihn so, dafs C auf der Hauptachse und D auf der Nebenachse gleitet; die mit der Bleifeder bezeichneten Lagen des Punktes P sind dann Ellipsenpunkte. —

Weil, wie wir bei der Begründung von Nr. 143_3 sahen, jedes Lot der Hauptachse für die Ellipse und den Hauptkreis denselben Punkt als Pol hat, so geht die Ellipsentangente in P durch den Punkt, in dem die Kreistangente in P_1 die Hauptachse schneidet[87 Z_1]. Diese Bemerkung wird in der Darstellenden Geometrie zur Konstruktion einer Ellipsentangente gebraucht.

145 145.* **Kurve aus den beiden Brennpunkten und einer Tangente.** Ist uns für eine Kurve ein Brennpunkt G gegeben, so kennen wir, da die konjugierte Strahleninvolution des Brennpunktes zirkular ist[142_2], die der Kurve in G konjugierte Strahleninvolution. Aus dieser Bemerkung ergiebt sich die Lösung der

Aufgabe[154]: *Eine Kurve zu zeichnen, von der die beiden Brennpunkte und eine Tangente gegeben sind.*

Die beiden Brennpunkte bezeichnen wir durch G und H, die gegebene Tangente durch s. Da je zwei homologe Strahlen c und c_1 der Strahleninvolution G^2 auf einander senkrecht stehen und ebenso je zwei homologe Strahlen γ und γ_1 von H^2, so ist der Verbindungslinie $GH = u$ in G^2 das Lot g auf u und in H^2 das Lot h auf u homolog; den unendlich fernen Schnittpunkt dieser Lote g und h nennen wir U. — Die gesuchte Kurve erhalten wir nun durch Übertragung der in Nr. 100 gegebenen Konstruktion ins Duale[7]:

Werden die Punkte, in denen die gegebene Gerade s

(Fig. 90) von den Seiten h und u des Dreiseits $g\,h\,u$ geschnitten wird, aus den Gegenecken G und U durch c und q projiziert, wird ferner der Schnittpunkt $c\,q$ aus der Ecke H durch γ projiziert, so ist die Verbindungslinie von $g\,\gamma$ und $c_1\,\gamma_1$ eine Tangente. Bezeichnen wir diese durch s_1, so sind die Verbindungslinien der Punkte, in denen s und s_1 von den homologen Strahlen der zirkularen Involution G^2 geschnitten werden, Tangenten der gesuchten Kurve.

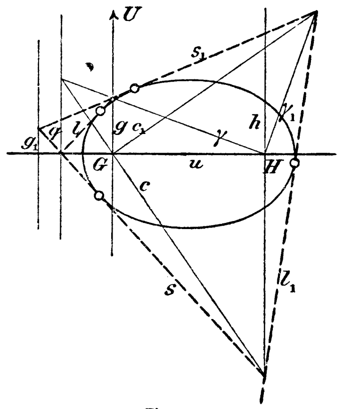

Fig. 90.

Anmerkung. Aus dem Beweise zu Nr. 100 ergiebt sich dual: Weil $s(u)$ und $s_1(g)$, $s(c)$ und $s_1(c_1)$ (Fig. 90) auf homologen Strahlen von G^2 liegen, so sind ihre Verbindungslinien l und l_1 Tangenten der Kurve. Wie das Vierseit $g\,h\,c\,\gamma$ zeigt, ist die Diagonallinie q von u durch s und l harmonisch getrennt[25 2]; $g\,q = U$ wird daher[21 2] aus $s\,s_1$ durch den von G durch s und s_1 harmonisch getrennten Strahl g_1, d. i.[98 1] die Polare von G, projiziert. A

Zusatz. Wiederholt man die Konstruktion für den Fall, Z dafs der Brennpunkt H ein uneigentlicher Punkt, also h die uneigentliche Gerade ist, so ergiebt sich $s \parallel c$ und $s_1 \parallel c_1$; die Verbindungslinie der Schnittpunkte $s(c)$ und $s_1(c_1)$, die Tangente l_1, ist daher die uneigentliche Gerade und somit[127 4] die Kurve eine Parabel:

> Liegt der eine der beiden Brennpunkte unendlich fern, so ist die Kurve eine Parabel.

146.* **Richtlinie.** Die in der vorigen Nummer[145 A] kon- 146 struierte Polare g_1 des Brennpunktes G hat eine besondere Wichtigkeit und daher einen besondern Namen, den wir einführen durch die

> 1. Definition: Die Polare eines Brennpunktes heifst *Richtlinie* (oder Direktrix). —

Statt der Buchstaben G und H, durch die wir in Nr. 145 die Brennpunkte bezeichneten, wollen wir uns von jetzt an wieder der bis dahin gebrauchten Buchstaben F und G bedienen und dem entsprechend die Polaren von F und G, die Richtlinien, durch f und g bezeichnen. Ist nun T ein beliebiger Punkt der Richtlinie f, so geht seine Polare durch den Punkt F und steht, da sie dem Brennstrahl $F\,T$ konjugiert ist$^{(92_1)}$, senkrecht auf $T\,F^{(142_2)}$:

2. *Die Polare eines Punktes* T *der Richtlinie* f *ist das im Brennpunkt* F *auf* T F *errichtete Lot.*

Ist demnach Y der uneigentliche Punkt der Richtlinie f, so ist seine Polare das von F auf f gefällte Lot $F\,F_1$; dieses schneidet die uneigentliche Gerade o in dem dem Punkte Y homologen Punkte X der zirkularen Punktinvolution, ist also eine Achse$^{(114_5)}$ der Kurve und, weil es durch F geht, die Hauptachse$^{(142_1)}$:

3. Das von einem Brennpunkt auf seine Richtlinie gefällte Lot ist die Hauptachse.

Dieser Satz ist ein besonderer Fall des folgenden. — Weil die konjugierte Strahleninvolution eines Brennpunktes F elliptisch ist$^{(112_3)}$, so ist die Richtlinie f eine elliptische Gerade$^{(105_3)}$; durch jeden Punkt T von f gehen daher$^{(107)}$ zwei Tangenten s und s_1, die als Ordnungsstrahlen die konjugierte Involution von T bestimmen$^{(92_7)}$ und daher die Polare von T in zwei Kurvenpunkten schneiden$^{(92_6)}$:

4. Wenn T ein Punkt der Richtlinie f ist, so schneidet das in dem Brennpunkte F auf $T\,F$ errichtete Lot die von T ausgehenden Tangenten in zwei Kurvenpunkten.

Man giebt diesem Satze auch wohl die Form: Die auf einer Tangente durch ihren Berührungspunkt und eine Richtlinie begrenzte Strecke erscheint in dem zugeordneten Brennpunkt unter einem rechten Winkel. —

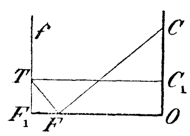

Fig. 91.

Schneidet die Polare eines beliebigen Punktes T (Fig. 91) der Richtlinie f die Nebenachse in C, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $O\,C\,F$ und $F_1\,F\,T$: $O\,C \,.\, F_1\,T = O\,F \,.\, F\,F_1$. Die Polare von C geht durch T und ist der Hauptachse parallel$^{(90_2)}$; schneidet sie die Nebenachse in C_1, so ist $O\,C \,.\, O\,C_1$ die Potenz$^{(138)}$ der konjugierten Involution der Nebenachse, die wir wieder mit $[b]$ bezeichnen wollen. Wir haben daher die auch im Vorzeichen richtige Gleichung

$$[b] = O\,C \,.\, O\,C_1 = O\,C \,.\, F_1\,T = O\,F \,.\, F\,F_1.$$

Ferner ist[41]

$$O\,F \,.\, F\,F_1 = O\,F \,.\, (F\,O + O\,F_1) = -\,O\,F^2 + O\,F \,.\, O\,F_1.$$

Das Produkt $O\,F \,.\, O\,F_1$ ist die Involutionspotenz der Hauptachse, also $O\,F \,.\, O\,F_1 = a^2$[139_3]; bezeichnen wir noch $O\,F = \frac{1}{2}\,G\,F$ durch e, so haben wir

5. $a^2 - e^2 = [b]$.

147.* **Zweites[124] Kennzeichen für die Ellipse und die Hyperbel.** Ist eine Kurve durch die beiden Brennpunkte F und G und eine Tangente t gegeben[145], so läſst sich ein Kennzeichen dafür angeben, ob die Kurve eine Ellipse oder Hyperbel ist. — Schneidet die Tangente t (Fig. 92) die Hauptachse x in B und die Nebenachse y in C, so schneidet die Normale n ihres Berührungspunktes P die Achsen x und y in den homologen Punkten B_1 und C_1 der fokalen Involutionen[141_5]. Die Polare des uneigentlichen Punktes Z der Tangente $B\,C$ geht durch den Berührungspunkt P[87 Z_2] und den Kurvenmittelpunkt O[114_2]; $O\,P$ und $O\,Z$ sind also zwei konjugierte Durchmesser und die Kurve ist eine Ellipse oder Hyperbel[120_1], je nachdem die konjugierte Strahleninvolution $O\,(B\,C \,.\, P\,Z)$ elliptisch oder hyperbolisch ist. 147

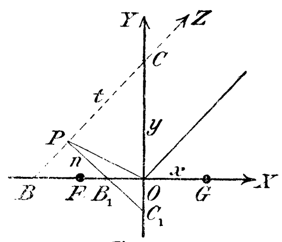

Fig. 92.

Wir nehmen nun an, die Tangente schneidet (wie in der Figur) die Hauptachse in einem Punkte B von $F \cdot G$[5], so daſs also $O\,B > O\,F$ ist. Da $O\,B \,.\, O\,B_1 = O\,F^2$ ist, so ist $O\,B_1 < O\,F$, d. h. B_1 liegt in $O\,B$ oder, wenn wir den uneigentlichen Punkt der Hauptachse X nennen, $O\,B \,.\, B_1\,X$ ist ein elliptischer Wurf. Da die fokale Involution der Nebenachse elliptisch ist[142_1], so ist, wenn ihr uneigentlicher Punkt Y genannt wird, $O\,Y \,.\, C\,C_1$ ein elliptischer, $O\,C \,.\, Y\,C_1$ also[10_4] ein hyperbolischer Wurf. Die Verbindungslinie $B_1\,C_1$ und die Verbindungslinie $X\,Y$, die uneigentliche Gerade, bestimmen also in den Seiten $O\,B$ und $O\,C$ des Dreiecks

OBC einen elliptischen und einen hyperbolischen Wurf, folglich[137$_1$] ist der in BC ausgeschnittene Wurf $BC.PZ$ elliptisch, die Kurve also eine Ellipse:

1. Eine Kurve ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der Punkt, in dem eine beliebige Tangente die Hauptachse schneidet, von dem Kurvenmittelpunkt durch die Brennpunkte getrennt oder nicht getrennt wird. —

Bemerkt mag noch werden, dafs als besonderer Fall aus Nr. 109 folgt:

2. Die Kurve ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der Punkt, in dem eine beliebige Tangente die Hauptachse schneidet, von dem Kurvenmittelpunkt durch die Scheitel getrennt oder nicht getrennt wird.

148 148.* **Entfernungen eines Kurvenpunktes von Brennpunkt und Richtlinie.** Die in Nr. 145 gegebene Konstruktion lehrt uns, zu der gegebenen Tangente s eine zweite s_1 und mit Hülfe der beiden Tangenten s und s_1 und der zirkularen Strahleninvolution eines Brennpunktes die übrigen finden. Wir können daher *jede* Kurve erzeugen, indem wir einen rechten Winkel sich um seinen Scheitel F drehen lassen und den Punkt, in dem s von dem einen Schenkel geschnitten wird, verbinden mit dem Punkte, in dem s_1 von dem andern Schenkel geschnitten wird.

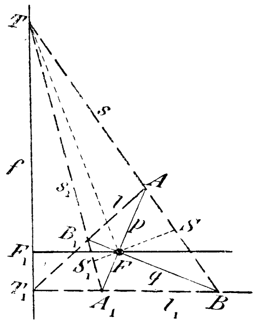

Fig. 93.

Wir zeigen nun, dafs wir, ausgehend von zwei beliebigen Geraden s und s_1 und einem beliebigen Punkte F, die Tangenten einer Kurve erhalten, wenn wir um F einen rechten Winkel sich drehen lassen. — Die Schenkel des rechten Winkels bezeichnen wir durch p und q (Fig. 93), die Schnittpunkte $s(p)$ und $s_1(q)$ durch A und B_1. Wenn p sich um F dreht, so ist

$$A \overline{\overline{\wedge}}\, p^{(112)} \overline{\wedge}\, q \overline{\overline{\wedge}}\, B_1;$$

die Verbindungslinie $AB_1 = l$ umhüllt also in der That eine Kurve[42]. Bezeichnen wir ferner die Schnittpunkte

$s(q)$ und $s_1(p)$ durch B und A_1, so ist, weil q in p fällt, wenn p in q fällt, auch die Verbindungslinie $BA_1 = l_1$ eine Tangente dieser Kurve. Bezeichnen wir noch die Schnittpunkte ss_1 und ll_1 durch T und T_1 und ihre Verbindungslinie TT_1 durch f, so bilden die Tangenten $ss_1\ ll_1$ ein Vierseit, von dem AA_1, BB_1, TT_1 die Gegenecken sind.

1. Da die Diagonallinien $AA_1 = p$ und $BB_1 = q$ einander konjugiert sind[92,3], so ist die konjugierte Involution von F zirkular, F also ein Brennpunkt[142,3]; seine Polare[85,2] f also die Richtlinie, und das von F auf f gefällte Lot FF_1 die Hauptachse[146,3]; das in F auf TF errichtete Lot schneidet s und s_1 in den Kurvenpunkten[146,4] S und S_1. —

Ist von einer Kurve ein Brennpunkt F, die zugeordnete Richtlinie f und eine Tangente s gegeben, die die Richtlinie in T schneidet, so kennen wir die konjugierte Strahleninvolution von T: Von dieser ist s ein Ordnungsstrahl[92,7], f und $T(F)$ sind zwei konjugierte Strahlen[92,1]; die zweite Tangente s_1 ist daher die von s durch f und F harmonisch getrennte Gerade. Da wir aus ss_1 und F die Kurve zeichnen können, so haben wir:

2. Eine Kurve ist durch einen Brennpunkt, seine Richtlinie und eine Tangente bestimmt. —

Da das Kurvenvierseit $ss_1\ ll_1$ und das zugeordnete Kurvenviereck $SS_1\ LL_1$ das Diagonaldreieck pqf gemeinsam haben[59], so geht SL (Fig. 94) durch den Diagonalpunkt $qf = P$[53]; es werden daher[24,3] S und L und folglich auch $F(S)$ und $F(L)$ durch p und q harmonisch getrennt. Weil p senkrecht auf q steht, so ist[41,5] $FS : FL = PS : PL$. Fällen wir nun von S und L die Lote SR und LR_1 auf die Richtlinie f, so ist nach einem Satze der Proportionenlehre $PS : PL = SR : LR_1$, folglich $SF : SR = LF : LR_1$.

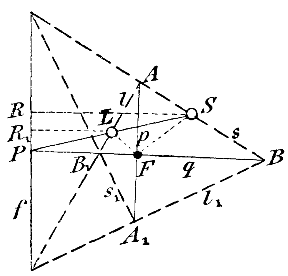

Fig. 94.

3. *Das Verhältnis aus den Entfernungen eines Kurvenpunktes von einem Brennpunkt und der zugeordneten Richtlinie ist konstant.*

149 **149.* Die von einem Brennpunkt auf die Kurventangenten gefällten Lote.** Wir erhalten[148, 1] die Tangenten unserer Kurve, indem wir zwei aufeinander senkrechte Strahlen p und q um F sich drehen lassen. Kommt p in die Lage des Lotes $C\,C_1$ (Fig. 95) von s, so ist q parallel s; daher ist die durch C_1 parallel s gezogene Gerade eine Tangente der Kurve; kommt p in die Lage des Lotes $D\,D_1$ von s_1, so ist, wie sich in derselben Weise ergiebt, die durch D parallel s_1 gezogene Gerade eine Tangente der Kurve. Die beiden gezeichneten Tangenten bilden mit s und s_1 ein Parallelogramm, d. h. ein Kurvenvierseit, dessen eine Diagonallinie die uneigentliche Gerade ist. Der dieser gegenüberliegende Diagonalpunkt, d. i.[25, 1] die Mitte O von $D\,C_1$, ist daher der Mittelpunkt der Kurve[85, 2]; durch ihn geht die Hauptachse, das von F auf die Richtlinie f gefällte Lot $F\,F_1$[146, 3].

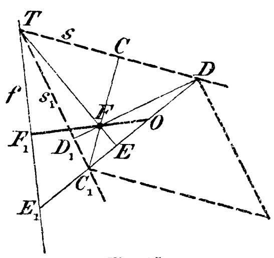

Fig. 95.

Wird $D\,C_1$ von $T\,F$ und der Richtlinie f in E und E_1 geschnitten, so sind, weil $T\,F$ von f durch s und s_1 harmonisch getrennt wird[92, 4], $D\,C_1\,.\,E\,E_1$ vier harmonische Punkte, daher[41, 4] $O\,E\,.\,O\,E_1 = O\,D^2$. Aus dem Viereck $T\,F\,C_1\,D$, in dem zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen, ergiebt sich[112, 7], dafs $T\,E$ senkrecht auf $C_1\,D$ steht; da die Hauptachse senkrecht auf f steht, so liegen $F\,F_1\;E\,E_1$ in einem Kreise, so dafs nach einem planimetrischen Satze ist $O\,F\,.\,O\,F_1 = O\,E\,.\,O\,E_1 = O\,D^2$. Weil O der Fluchtpunkt und F und F_1 zwei homologe Punkte der konjugierten Involution der Hauptachse sind, so ist $O\,F\,.\,O\,F_1 = a^2$[139, 3], also $O\,D = a$, wenn wir wieder durch a die halbe Länge der Hauptachse bezeichnen. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $C_1\,D\,C$ ergiebt sich noch $O\,C = O\,D$, mithin $O\,C = a$:

Die Fufspunkte der von einem Brennpunkt auf die Tangenten gefällten Lote liegen im Hauptkreise.

z *Zusatz.* Sind F und G (Fig. 96) die beiden Brennpunkte und s eine beliebige Tangente, so müssen die Tangente und die Normale ihres Berührungspunktes P die beiden Achsen in homologen Punkten $B\,B_1$ und $C\,C_1$ der fokalen Involutionen schneiden[141₅] und die von den Brennstrahlen PF und PG gebildeten Winkel halbieren[142₆]. Nehmen wir an, dafs die Tangente (wie in der Figur) die Hauptachse in einem Punkte von $F \cdot G$[5] schneidet, dafs also[147₁] die Kurve eine Ellipse ist, so halbiert die Tangente den Nebenwinkel von GPF. Das von F auf die Tangente s gefällte Lot FH trifft also die Verlängerung der Seite PG des Dreiecks PFG.

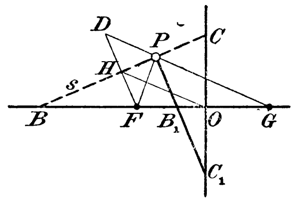

Fig. 96.

Weil aus $\angle FPH = HPD$ folgt, dafs $PF = PD$ und $FH = HD$ ist, so ergiebt sich:

$$PF + PG = GD = 2\,HO = 2a^{(149)}:$$

1. Die Summe aus den Brennstrahlen eines Ellipsenpunktes ist konstant und zwar gleich der Länge der Hauptachse.

Für eine Hyperbel ergiebt sich in derselben Weise:

2. Die Differenz aus den Brennstrahlen eines Hyperbelpunktes ist konstant und zwar gleich der Länge der Hauptachse.

150.* **Vierseit mit zwei rechtwinkligen Gegenecken.** 150
In Nr. 148 haben wir die Aufgabe gelöst: Aus zwei Tangenten s und s_1 und der zirkularen Involution des Punktes F die Kurve zu zeichnen. Es bleibt noch der besondere Fall zu erledigen, dafs die Geraden s und s_1 aufeinander senkrecht stehen. Da auch die homologen Strahlen p und q (Fig. 97) der Involution F^2 aufeinander senkrecht stehen, so bilden, wenn wir die frühere Bezeichnung[148] beibehalten, $A\,B\,A_1\,B_1$ die Ecken eines Vierecks, von dem zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen; es ist daher[112₇] auch $A\,B_1 = l$ senkrecht auf $A_1\,B = l_1$; es stehen also je zwei Tangenten, die sich in einem Punkte der Richtlinie schneiden, aufeinander senkrecht.

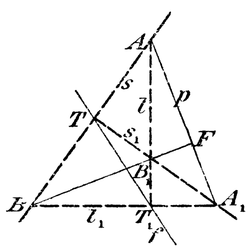

Fig. 97.

Kommt p bei seiner Drehung um F (vgl. 149) in die Lage des von F auf s gefällten Lotes, so wird zugleich p

parallel s_1 und q parallel s; die Tangente $A_1 B$ ist daher, weil A_1 und B die uneigentlichen Punkte von s_1 und s sind, die uneigentliche Gerade, unsere Kurve also[127$_4$] eine Parabel (vgl. 145 Z). — Um dies Ergebnis in Worte kleiden zu können, wollen wir den Schnittpunkt zweier Seiten eines Vierseits, die aufeinander senkrecht stehen, eine *rechtwinklige Ecke* des Vierseits nennen und entsprechend einen Diagonalpunkt, in dem sich zwei aufeinander senkrecht stehende Diagonallinien schneiden, einen *rechtwinkligen Diagonalpunkt:*

Ein Vierseit mit zwei rechtwinkligen Gegenecken hat einen rechtwinkligen Diagonalpunkt. *Von der durch die Seiten eines solchen Vierseits bestimmten Parabel*[127$_6$] *ist der rechtwinklige Diagonalpunkt der Brennpunkt und die Verbindungslinie der rechtwinkligen Gegenecken die Richtlinie.*

A *Anmerkung.* Man kann diesem Satze eine andere Form geben, wenn man von dem Dreieck $A A_1 B$ (Fig. 97) ausgeht, in welchem die beiden Seiten $B A$ und $B A_1$ und ihre Höhen unsere Tangenten $s s_1\ l l_1$ sind: Zwei Seiten eines Dreiecks und ihre Höhen bestimmen eine Parabel, von welcher der Fufspunkt der dritten Höhe der Brennpunkt ist, während die Fufspunkte der beiden ersten Höhen in der Richtlinie liegen.

151 151.* **Parabelsätze.** Da für eine Parabel die uneigentliche Gerade eine Tangente ist[127$_3$], so folgt aus Nr. 148_2:

1. Eine Parabel ist durch einen Brennpunkt und seine Richtlinie bestimmt.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Richtlinie f und der uneigentlichen Gerade o durch Y, so ist die zweite durch Y gehende Tangente (vgl. 148_2) der von o durch F und f harmonisch getrennte Strahl t des Punktes Y, den wir z. B. dadurch erhalten[27$_2$], dafs wir durch die Mitte A des von F auf f gefällten Lotes $F F_1$ die Parallele zu f ziehen. Da Y der Pol von $F F_1$ ist[148$_1$], so schneiden die Ordnungsstrahlen der konjugierten Involution Y^2 die Gerade $F F_1$ in zwei Kurvenpunkten[92$_6$] A und A_1, die zugleich die Scheitel[143$_1$] sind, weil $F F_1$ die Hauptachse ist[148$_1$]. Der Strahl t ist also die Tangente in dem Scheitel A der Parabel; der zweite Scheitel A_1 ist, als Punkt von o, der uneigentliche Punkt der Hauptachse, seine Tangente die uneigentliche Gerade.

Aus der in Nr. 148_1 gezeigten Konstruktion einer Kurve wird also für die Parabel, wenn wir s und s_1 in t und o fallen lassen, die folgende:

2. Die Tangenten einer durch den Brennpunkt und die (eigentliche) Scheiteltangente gegebenen Parabel sind die Lote, die man auf den Brennstrahlen in ihren Schnittpunkten mit der Scheiteltangente errichtet.

Der uneigentliche Scheitel A_1 ist der Pol$^{(87\ Z_2)}$ von o, also der Mittelpunkt$^{(114_2)}$ der Parabel. Da ferner der Mittelpunkt und der uneigentliche Punkt der Hauptachse homologe Punkte der fokalen Involution sind$^{(141_3)}$ und diese beiden Punkte zusammenfallen, so ist A_1 ein Ordnungspunkt der fokalen Involution, d. h.$^{(142_1)}$ ein Brennpunkt:

3. Für eine Parabel fallen der Mittelpunkt, ein Brennpunkt und ein Scheitel in den uneigentlichen Punkt der Hauptachse.

Schneidet die Tangente des Parabelpunktes P die Achse in Q_1, so ist die Polare von Q_1 das von P auf die Hauptachse gefällte Lot $P\,Q^{(90_4)}$; Q_1 und Q sind also zwei konjugierte Punkte der Hauptachse; da die konjugierte Involution der Hauptachse durch die beiden Scheitel als Ordnungspunkte bestimmt ist, so ist A die Mitte der (*Subtangente* genannten) Strecke $Q\,Q_1$:

4. Jede Subtangente einer Parabel wird durch den Scheitel halbiert.

Da Tangente und Normale die Hauptachse in homologen Punkten Q_1 und N der fokalen Involution schneiden$^{(141_5)}$, so wird, weil der eine Brennpunkt der Parabel ein uneigentlicher Punkt ist, die Strecke $Q_1\,N$ in F halbiert, folglich $Q_1\,F = \frac{1}{2}\,Q_1\,N$; vorher fanden wir $Q_1\,A = \frac{1}{2}\,Q_1\,Q$, also durch Subtraktion: $A\,F = \frac{1}{2}\,Q\,N$. Die Strecke $Q\,N$, die *Subnormale* genannt wird, hat also den konstanten Wert $2\,A\,F$. Die Gröfse $2\,A\,F$ heifst der halbe *Parameter* der Parabel, so dafs wir haben:

5. Die Subnormale einer Parabel ist gleich dem halben Parameter.

Da der (eigentliche) Scheitel A die Mitte von $F\,F_1$ ist, also von F und f gleiche Entfernungen hat, so folgt aus Nr. 148_3:

6. Jeder Parabelpunkt hat von dem (eigentlichen) Brennpunkt und der (eigentlichen) Richtlinie gleiche Entfernungen.

152 152.* **Der Hauptkreis der Parabel.** Verbinden wir zwei Punkte A und A_1 mit den homologen Punkten E und E_1 der zirkularen Punktinvolution, so liegen die Schnittpunkte der Strahlen $A(E)$ und $A_1(E_1)$ in einem Kreise mit dem Durchmesser $A A_1^{(98_1 \text{ u. } 131_1)}$. Fällt der Punkt A_1 in die uneigentliche Gerade, so ist der Strahl $A_1(E_1)$, so lange E_1 nicht in A_1 fällt, die uneigentliche Gerade; fällt aber E in den dem Punkte A_1 homologen Punkt der zirkularen Involution, E_1 also in A_1, so ist jeder Strahl von A_1 als Verbindungslinie $A_1(E_1)$ zu betrachten, mithin jeder Punkt von $A(E)$ als Schnittpunkt homologer Strahlen:

1. Fällt der Punkt A_1 in die uneigentliche Gerade, so zerfällt der Kreis, der $A A_1$ zum Durchmesser hat, in die uneigentliche Gerade und das in A auf $A A_1$ errichtete Lot.

Aus dieser Bemerkung ergiebt sich$^{(151_3)}$:

2. Für eine Parabel zerfällt der Hauptkreis$^{(143_2)}$ in die uneigentliche Gerade und die Scheiteltangente.

Nun wissen wir$^{(149)}$, dafs die Fufspunkte der vom Brennpunkte auf die Tangente gefällten Lote im Hauptkreise liegen; für die Parabel müssen sie also in der uneigentlichen Gerade und in der Scheiteltangente liegen. Fällen wir aber von einem eigentlichen Punkte auf eine eigentliche Gerade das Lot, so kann der Fufspunkt kein uneigentlicher Punkt sein, weil Tangente und Lot die uneigentliche Gerade in zwei homologen Punkten der zirkularen Involution schneiden$^{(112_4)}$ und von dieser elliptischen$^{(112_3)}$ Involution nicht zwei Punkte zusammenfallen. Jede eigentliche Gerade ist aber ein Lot der uneigentlichen Gerade$^{(112_5)}$. Die Fufspunkte der vom Brennpunkt auf die eigentlichen Parabeltangenten gefällten Lote liegen daher in der Scheiteltangente und die Fufspunkte der vom Brennpunkt auf die uneigentliche Gerade gefällten Lote in der uneigentlichen Gerade:

3. Die Fufspunkte der vom Brennpunkt auf die

(eigentlichen) Parabeltangenten gefällten Lote liegen in der Scheiteltangente.

Anmerkung. Wir haben gezeigt, dafs der letzte Satz A
aus einem allgemeinen als besonderer Fall abgeleitet werden kann. Kürzer wäre es gewesen, ihn direkt aus der Parabelkonstruktion[150] abzuleiten: er ergiebt sich daraus, dafs s und s_1 die von $T(F)$ und f gebildeten Winkel (Fig. 97) halbieren.

153.* **Krümmungskreis.** Die Steinersche Parabel[140$_5$] 153
lieferte uns die fokalen Involutionen; diese zeigten uns ein ganz neues Bild der Kurve, indem sie uns zu den Brennpunkten und Richtlinien führten und den Zusammenhang zwischen der Kurve und ihrem Hauptkreise aufdeckten. Die fokalen Involutionen sind aber nicht die einzige Erweiterung unserer Kenntnisse, die wir dieser Entdeckung Steiners verdanken; die Steinersche Parabel führt uns auch noch zu dem Begriff des Krümmungskreises.

Wir haben gefunden[141$_5$], dafs dem parabolischen Büschel, welches einem Kurvenpunkte zugeordnet ist, Tangente und Normale dieses Kurvenpunktes als Strahlen angehören. Diese Strahlen, die wir durch t und n bezeichnen wollen, berühren die Steinersche Parabel in zwei Punkten N und K, deren Bedeutung für die Kurve wir aufsuchen wollen.

Da die Polare eines Kurvenpunktes S seine Tangente ist[86 Z$_2$], so wissen wir[140$_5$], dafs die den Strahlen a von S konjugierten Lote a_1 die Geraden sind, welche die homologen Punkte A_1 und A_1 der in t und o liegenden projektiven Punktreihen verbinden. Dem Schnittpunkt $o(t)$ ist in der zirkularen Punktinvolution, weil t senkrecht auf n steht, der Punkt $o(n)$ homolog. Fällt daher a in n, d. h. A in $o(n)$ und A_1 in $o(t)$, so fällt A_1, der Pol des in die Normale fallenden Strahles a, in den Punkt von t, welcher dem Schnittpunkt $o\,t$ der beiden Träger in der Punktreihe von t homolog ist, d. i.[45] in den Punkt N, in dem t die Steinersche Parabel berührt:

1. Jede Kurventangente berührt die ihrem Berührungspunkte zugeordnete Steinersche Parabel im Pol der Normale. —

Die Bedeutung des Punktes K, in dem die Normale n die Steinersche Parabel berührt, finden wir durch eine Beweisart, von der wir bisher noch keinen Gebrauch gemacht haben, die aber sonst vielfach, auch in der Geometrie der Lage, benutzt wird: die Betrachtung des Schnittpunktes zweier unendlich nahen Geraden (der dual gegenübersteht die Betrachtung der Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte).

Ist S ein Punkt einer Kurve k^2, S_1 ein zweiter und T der Schnittpunkt der Tangenten in S und S_1, so ergiebt sich, wenn wir für den Punkt T die Steinersche Parabel zeichnen, dafs zu ihren Strahlen auch die Normalen in S und S_1 gehören; denn dem Strahl $T(S)$ entspricht als konjugiertes Lot die Normale in S und ebenso dem Strahle $T(S_1)$ die Normale in S_1. Lassen wir den Punkt S sich dem Punkte S_1 unbegrenzt nähern, so dafs $T(S)$ und $T(S_1)$ zwei auf einander folgende Strahlen des geraden Büschels T werden, so werden die beiden Normalen zwei auf einander folgende Parabeltangenten; ihr Schnittpunkt fällt also, wenn S_1 (mithin auch T) in S fällt, in den Punkt, in dem die Normale in S die zu S gehörende Steinersche Parabel berührt. —

Der Schnittpunkt K zweier unendlich nahen Normalen hat für das Zeichnen einer Kurve grofse Bedeutung. Ziehen wir nämlich um K mit dem Halbmesser KS einen Kreis, so hat dieser mit der Kurve in zwei unendlich nahen Punkten die Tangenten gemeinsam; er nähert sich also der Kurve in der Nähe des Punktes S mehr als irgend ein anderer Kreis. Einen solchen Kreis nennt man *Krümmungskreis* und seinen Mittelpunkt *Krümmungsmittelpunkt:*

> 2. *Die einem Kurvenpunkte zugeordnete Steinersche Parabel berührt die Normale des Kurvenpunktes im Krümmungsmittelpunkt.*

Für einen Punkt der Achse zerfällt die Steinersche Parabel in zwei gerade Strahlenbüschel[(140_6)]; der Mittelpunkt des einen ist der dem Punkte in der fokalen Involution homologe. Daraus ergiebt sich:

> 3. Der einem Scheitel der Kurve zugeordnete Krümmungsmittelpunkt ist der dem Scheitel in der fokalen Involution homologe Punkt.

4. *Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes.* Sind uns von einer Kurve die Achsen und für den Kurvenpunkt S (Fig. 98) die Tangente t und die Normale n bekannt, so können wir die dem Punkte S zugeordnete Steinersche Parabel(141₂) und damit den Krümmungskreis zeichnen. Werden nämlich die Achsen von t in B und C, von n in B_1 und C_1 geschnitten, so ist der Schnittpunkt F' von $B\,C_1$ und $B_1\,C$ der Brennpunkt der Steinerschen Parabel und S ein Punkt der Richtlinie(150); das in F' auf $S\,F'$ errichtete Lot schneidet daher die Normale n in dem Krümmungsmittelpunkte K(146₄).

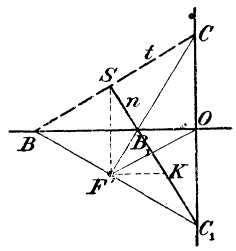

Fig. 98.

5. Dieser Konstruktion soll noch eine Bemerkung angefügt werden, von der wir später(157) Gebrauch zu machen haben. Weil (Fig. 98) als Peripheriewinkel $\angle\, S\,F'\,C = S\,C_1\,C$ und $C\,F'\,O = C\,B\,O$ ist, so ist $\angle\, S\,F'\,O = 1\,R$, wenn $\angle\, S\,C_1\,C = C\,B\,O = \frac{1}{2}\,R$ ist. Der Krümmungsmittelpunkt K liegt daher in der Verbindungslinie $F'O$, wenn die Tangente mit den beiden Achsen gleiche Winkel bildet.

154.* **Erste Kurvenkonstruktion durch Krümmungskreise.** Das Ergebnis der vorigen Nummer setzt uns in den Stand, eine bessere Zeichnung einer Kurve zu geben, als es uns bis jetzt möglich war. Unser bisheriges Verfahren bestand darin, dafs wir eine Anzahl von Punkten konstruierten und dann die fehlenden durch Schätzung einfügten. Dies Eintragen der fehlenden Punkte nun läfst sich mit Hülfe der Krümmungskreise genauer ausführen, als es durch blofses Schätzen möglich ist. 154

Gehen wir von der Aufgabe aus: Durch fünf Punkte eine Kurve zu legen, so ist der Gang der Lösung folgender. — Wir zeichnen(48 Z) den Schnittpunkt der Tangenten in zwei Kurvenpunkten, konstruieren(118 A) den Mittelpunkt und dann(119) die Achsen der Kurve; mit Hülfe der Achsen und der Tangente und Normale eines Kurvenpunktes S läfst sich dann der Krümmungskreis für S zeichnen(153₄). — Statt diese Konstruktionen, die sich an *einer* Figur doch nicht übersichtlich würden darstellen lassen, hier noch einmal im einzelnen durchzuführen, wollen wir von solchen gegebenen

Stücken ausgehen, die uns die Achsen unmittelbar ergeben. Wir lösen noch einmal[145] die

Aufgabe: Eine Kurve aus den beiden Brennpunkten und einer Tangente zu zeichnen.

Schneidet die gegebene Tangente t (Fig. 99) die Hauptachse in B, so erhalten wir die Normale n ihres Berührungspunktes S[141_5], indem wir auf t das Lot n fällen aus dem Punkte B_1, der von B durch die Brennpunkte F und G harmonisch getrennt ist.

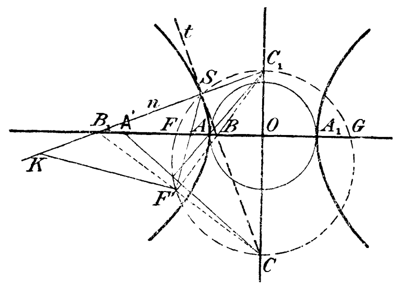

Fig. 99.

Wird das Mittellot von FG, die Nebenachse[142_4], von t in C und von n in C_1 geschnitten, so ist[153_4] der Schnittpunkt F' von BC_1 und B_1C der Brennpunkt der dem Punkt S zugeordneten Steinerschen Parabel und der Punkt K, in dem das in F' auf SF' errichtete Lot die Normale schneidet, der Krümmungsmittelpunkt. — Fällen wir von dem Brennpunkt F auf die Tangente t das (in der Figur nicht gezeichnete) Lot FH, so ist der um die Mitte O von FG mit OH geschlagene Kreis der Hauptkreis[149], durch den wir die Scheitel A und A_1 der Hauptachse erhalten. Zeichnen wir noch den von A durch F und G harmonisch getrennten Punkt A', so ist dies der dem Scheitel A zugeordnete Krümmungsmittelpunkt[153_3].

A *Anmerkung.* Die Figur ist allein mit Hülfe der beiden Krümmungskreise um K und A' gezeichnet. — Es ist vorteilhaft den Kreis über dem Durchmesser CC_1 zu zeichnen; er geht durch S und durch F[142_4] und kann (siehe Fig. 99) zur Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes A' benutzt werden[98_2].

155 155.* **Krümmungskreise der Parabel.** Die vorhergehende[154] Konstruktion wird besonders einfach, wenn der eine Brennpunkt ein uneigentlicher Punkt, also[145 Z] die Kurve eine Parabel ist. Für eine Parabel ist der Mittelpunkt O ein uneigentlicher Punkt[127_3], die Nebenachse also die uneigentliche Gerade. Die Punkte C und C_1 sind daher die

uneigentlichen Punkte von t und n, und $B C_1$ ist parallel n und $B_1 C$ parallel t; $S B F' B_1$ sind also die Ecken eines Rechtecks, so daſs F die Mitte von $S F'$ ist. Daraus ergiebt sich die folgende

Konstruktion der Parabel: Schneidet die gegebene Tangente die Hauptachse in B (Fig. 100), so schlagen wir um den Brennpunkt F mit $F B$ einen Kreis, der die Tangente in S, die Hauptachse in B_1 und die Verbindungslinie $F S$ in F' zum zweiten Male schneidet; das in F' auf $F S$ errichtete Lot trifft die Normale $S B_1$ im Krümmungsmittelpunkt K.

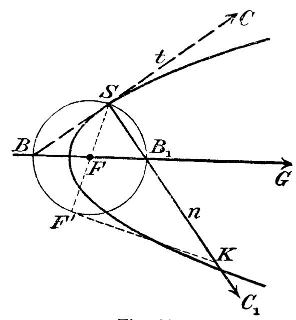

Fig. 100.

156.* **Zweite Kurvenkonstruktion durch Krümmungskreise.** In Nr. 148 sahen wir, wie sich aus zwei Tangenten s und s_1 und dem Brennpunkte F eine Kurve zeichnen läſst. Indem wir jetzt von dem besondern Falle ausgehen, daſs der Schnittpunkt T der Tangenten s und s_1 ein uneigentlicher Punkt ist, geben wir eine zweite Kurvenkonstruktion durch Krümmungskreise. Das in F auf $T F$ errichtete Lot, welches die Tangenten in zwei Kurvenpunkten schneidet(146₄), steht in diesem Fall auch senkrecht auf der (durch T gehenden) Richtlinie und ist daher(148₁) die Hauptachse. Die parallelen Tangenten liefern uns also die Scheitel A und A_1 der Kurve. Umgekehrt können wir auch s und s_1 als bestimmt ansehen durch die Scheitel A und A_1 und unsere Aufgabe demnach so fassen: 156

> *Eine Kurve zu zeichnen, von der die beiden (Haupt-(143₁)) Scheitel und ein Punkt ihrer Verbindungslinie als Brennpunkt gegeben sind.*

Ist F_1 der dem Brennpunkt F in der konjugierten Involution der Hauptachse homologe Punkt, so gehen durch ihn zwei Tangenten, die von dem im Brennpunkt F auf der Hauptachse errichteten Lot in zwei Kurvenpunkten(146₄) geschnitten werden. Auf diese Bemerkung und die weitere, daſs die Fuſspunkte der vom Brennpunkte auf die Tangenten gefällten Lote im Hauptkreis liegen(149), stützt sich die folgende

Konstruktion: Wir zeichnen den Hauptkreis der durch die Scheitel $A\,A_1$ und den Brennpunkt F (Fig. 101) gegebenen Kurve und bezeichnen die Punkte, in denen er das Mittellot von $A\,A_1$, die Nebenachse, schneidet, durch C und C_1. Den Brennpunkt F projizieren wir aus C_1 auf den Hauptkreis und verbinden den erhaltenen Punkt D mit C. Diese Verbindungslinie $C\,D$ ist, weil sie durch den dem Brennpunkt F konjugierten Punkt F_1 geht[(98$_2$ und 143$_3$)] und senkrecht auf $F\,D$ steht, eine Tangente der Kurve[(149)], die von dem im Brennpunkt F auf der Hauptachse errichteten Lot in ihrem Berührungspunkte S geschnitten wird. Tangente und Normale von S liefern uns den zugeordneten

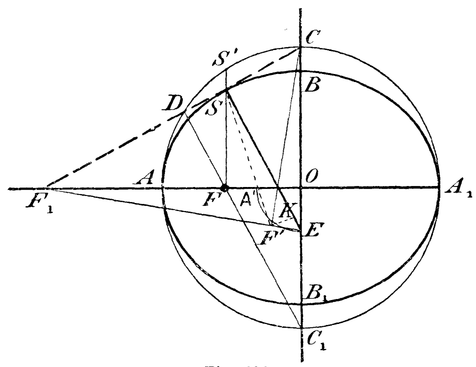

Fig. 101.

Krümmungskreis[(153$_4$)]. — Zu bemerken ist noch: Die Normale in S schneidet die Nebenachse in einem Punkte E, der dem Punkte C in der fokalen Involution der Nebenachse homolog ist[(141$_5$)]. Das von E auf $A\,C$ gefällte Lot schneidet daher die Hauptachse in dem Punkte A', der dem Scheitel A in der fokalen Involution homolog ist; daraus folgt, weil $O\,A = O\,C$ ist, dafs auch $O\,\mathsf{A}' = O\,E$ ist. Man erhält also den Krümmungsmittelpunkt des Scheitels, indem man $O\,\mathsf{A}' = O\,E$ macht. — Liegt F auf $A\,A_1$, F_1 also[(24$_1$)] auf $A \cdot A_1$, so ist die Kurve eine Ellipse[(147$_2$)] und das im Brennpunkt auf der Hauptachse errichtete Lot schneidet auch den Hauptkreis[(144)]. Nennen wir den einen Schnittpunkt S', so ist nach dem Pythagoras $F\,S'^2 = a^2 - e^2$, also gleich b^2[(146$_5$)]; wir kennen mithin auch die Punkte B und B_1, in denen die Nebenachse die Kurve schneidet.

Anmerkung. Da die im Text erwähnten Krümmungskreise zur Zeichnung der Figur 101 nicht ausreichen, so müſste eigentlich zwischen A und S noch ein Kurvenpunkt eingeschaltet und auch für diesen der Krümmungskreis gezeichnet werden. Infolge der Fehler aber, die beim Zeichnen unvermeidlich sind, erhält man eine ebenso gute Figur, wenn man den letzten Krümmungskreis durch Schätzung einträgt. A

157.* **Zweite**(144) **Konstruktion der Ellipse aus ihren beiden Achsen.** Die letzte Bemerkung der vorigen Nummer zeigte, daſs wir aus $A A_1$ und F die Länge $O B$ der Nebenachse zeichnen konnten, wenn F auf $A A_1$ liegt, die Kurve also eine Ellipse ist. Umgekehrt ergiebt sich, daſs uns eine Kurve durch $A A_1$ und B gegeben ist. Da sich in diesem Falle eine besonders einfache Konstruktion für einzelne Krümmungskreise ergiebt, so mag hier noch folgen die Lösung der 157

Aufgabe: *Eine Ellipse aus ihren beiden Achsen zu zeichnen.*

Schneiden sich die Lote, welche wir in A (Fig. 102) auf der Hauptachse und in B auf der Nebenachse errichten, in D, so ist D, als Schnittpunkt der Tangenten in A und B, der Pol von $A B$(87 Z₁); das von D auf $A B$ gefällte Lot ist daher das der Gerade $A B$ konjugierte und schneidet mithin(141₄) die Achsen in zwei Punkten A' und B', die den Scheiteln A und B in den fokalen Involutionen homolog sind, d. i.(153₃) in den den Scheiteln zugeordneten Krümmungsmittelpunkten. — Bezeichnen wir den Fuſspunkt des von D auf $A B$ gefällten Lotes durch P, so ergiebt sich, wenn wir $O A = a$ und $O B = b$ setzen, nach einem planimetrischen Satze aus dem rechtwinkligen Dreieck $A B D$:

$$P A = b^2 : \sqrt{a^2 + b^2} \text{ und } P B = a^2 : \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Machen wir $O Q = P B$ und errichten in Q auf der Hauptachse das Lot, so ist die Potenz der konjugierten Involution dieses Lotes für den Hauptkreis(139₆) $a^2 b^2 : a^2 + b^2$. Folglich(143₄) finden wir die Potenz y^2 der der Kurve konjugierten Involution dieses Lotes aus

$$y^2 : \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = b^2 : a^2;$$

es ist also $y = P A$. Wir erhalten demnach einen Kurvenpunkt S, wenn wir PB und PA als Abszisse und Ordinate benutzen, d. h. $QS = PA$ auf dem in Q errichteten Lote abtragen. — Nennen wir noch den nicht gezeichneten Schnittpunkt dieses Lotes mit dem Hauptkreis S', so wissen wir(143₃), dafs die Tangente des Ellipsenpunktes S die Hauptachse in demselben Punkte Q_1 schneidet, wie die Tangente des Kreispunktes S'. Es ist also $Q\,Q_1 = Q\,S'^2 : O\,Q$, folglich $Q\,Q_1 = Q\,S = P\,A$. Die Normale des Kurvenpunktes S schneidet also die Hauptachse in einem Punkte N, so dafs $NQ = QS = PA$ ist. — Konstruieren wir(153₄) aus Tangente und Normale und den beiden Achsen den Brennpunkt F' der Steinerschen Parabel, so liegt(153₅), weil $\angle S\,F'\,O$ ein Rechter ist, der Krümmungsmittelpunkt K in $F'\,O$. Da noch $\angle S\,O\,Q = Q\,O\,F'$ ist(112₈), so schneidet $O\,F'$ das Lot QS in einem Punkte S_1 so, dafs Q die Mitte von $S\,S_1$ ist. — Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich die folgende

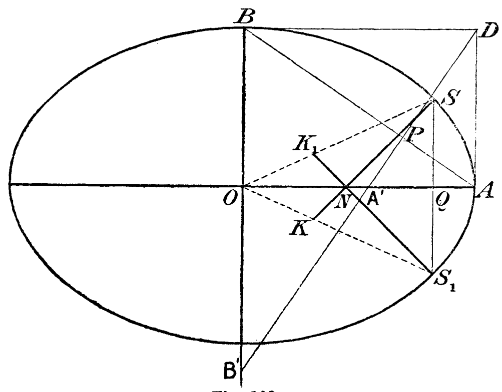

Fig. 102.

Konstruktion: Wir errichten in dem Scheitel A (Fig. 102) der Hauptachse und in dem Scheitel B der Nebenachse die Lote und fällen von ihrem Schnittpunkte D das Lot auf AB, welches AB in P und die Achsen in A' und B', den zu A und B gehörigen Krümmungsmittelpunkten, schneidet. Wir machen $O\,Q = P\,B$ und schlagen um Q mit PA einen Kreis, der die Hauptachse in N und das in Q auf der Hauptachse errichtete Lot in den Kurvenpunkten S und S_1 schneidet; die Verbindungslinie $S\,N$ schneidet dann $O\,S_1$ in dem dem Punkte S zugeordneten Krümmungsmittelpunkte K.

Zweiter Teil.

Das Polarfeld.

§ 13. Die resultierende Involution.

158. **Art der Beweisführung.** Durch den Satz[50], dafs 158
die Punkte einer Kurve aus zwei beliebigen unter ihnen durch zwei projektive Strahlenbüschel projiziert werden, kamen wir zum Begriff projektiver krummer Punktreihen[71]. Indem wir zwei in derselben Kurve liegende projektive Punktreihen betrachteten, in denen zwei Punkte einander zweifach entsprechen, kamen wir zum Begriff der krummen Punkt- und Strahleninvolution[72], durch diese zum Begriff der Involutionsachse[78] und des Involutionszentrums[79], durch diese zu den Begriffen Pol und Polare[84], durch diese zum Begriff der konjugierten Punkte[92]. Jetzt wollen wir, in umgekehrter Richtung uns bewegend, von dem Begriff der konjugierten Punkte ausgehen und mit Hülfe der Polarentheorie Sätze über Involutionen und Projektivitäten beweisen.

Da es sich demnach um eine Anwendung der Sätze über Pol und Polare handelt, so werden wir im folgenden keine neuen Beweismittel kennen lernen. Dadurch aber, dafs wir die so gewonnenen Sätze von dem Begriff der konjugierten Punkte loslösen können, gelangen wir zu Involutions- und Projektivitätssätzen von grofser Fruchtbarkeit; *sie erst ermöglichen, die Geometrie der Lage in allgemein gültigen Sätzen darzustellen.*

Anmerkung. Die folgenden Sätze (sowie solche des § 14 A
und des § 18) hat Herr H. Wiener in seiner Abhandlung: *Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen*

durch Punktgruppen auf der Geraden, Darmstadt 1885, ohne Hülfe der Polarentheorie bewiesen.

159 159. **Resultierende Involution.**

1. *Definition: Von zwei krummen Punktinvolutionen, die in derselben Kurve liegen, heifst die eine eine resultierende der andern, wenn die Zentren konjugierte Punkte sind.* —

Um eine kurze Ausdrucksweise zu ermöglichen, bezeichnen wir im folgenden eine krumme Punktinvolution, deren Zentrum der Punkt P ist[82], durch $[P]$.

2. Sind B und B_1 irgend zwei homologe Punkte einer krummen Involution $[Q]$ und $B\mathsf{B}$ und $B_1\mathsf{B}_1$ zwei Paar homologe Punkte der resultierenden Involution $[P]$, so sind B und B_1 wieder zwei homologe Punkte von $[Q]$.

Beweis: Die vier Punkte $B\mathsf{B}B_1\mathsf{B}_1$ bilden ein Kurvenviereck, von dem zwei Seiten $B\mathsf{B}$ und $B_1\mathsf{B}_1$ nach der Voraussetzung durch das Zentrum P der Involution $[P]$ gehen, während die dritte Seite BB_1 durch den dem Punkte P konjugierten Punkt Q geht; es geht daher[97, 1] die Gegenseite $\mathsf{B}\mathsf{B}_1$ dieser dritten Seite ebenfalls durch Q; B und B_1 sind also zwei homologe Punkte der krummen Involution $[Q]$[82].

160 160. **Übertragung auf beliebige Involutionen.** Um diesen Satz[159] auf beliebige Involutionen zu übertragen, müssen wir die Definition der resultierenden Involution von dem Begriff der konjugierten Punkte loslösen. Das erreichen wir durch die für zwei beliebige in demselben Träger liegende Involutionen P^2 und Q^2 gültige

1. Definition: *Von zwei Involutionen P^2 und Q^2 heifst die eine eine resultierende der andern, wenn zwei homologen Elementen von Q^2 in P^2 zwei Elemente homolog sind, die einander wieder in Q^2 homolog sind.*

In Zeichen: Wenn $P^2 = A\mathsf{A}\,.\,A_1\mathsf{A}_1$ und $Q^2 = AA_1\,.\,\mathsf{A}\mathsf{A}_1$ ist, so heifst von den beiden Involutionen P^2 und Q^2 die eine eine resultierende der andern. —

2. Lehrsatz: Sind B und B_1 zwei beliebige homologe Elemente der Involution Q^2 und $B\mathsf{B}$ und $B_1\mathsf{B}_1$ zwei Paar homologe Elemente einer resultierenden Involution P^2, so sind B und B_1 einander homolog in Q^2.

In Zeichen: Aus $P^2 = A\,\mathsf{A}\,.\,A_1\,\mathsf{A}_1\,.\,B\,\mathsf{B}\,.\,B_1\,\mathsf{B}_1$ und $Q^2 = A\,A_1\,.\,\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1\,.\,B\,B_1$ folgt, dafs B und B_1 einander homolog sind in Q^2.

Beweis: Wir zeigen die Richtigkeit des Satzes zunächst für krumme Punktinvolutionen. — Betrachten wir das Kurvenviereck $A\,A_1\,\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ (Fig. 103), so ist, weil $P^2 = A\,\mathsf{A}\,.\,A_1\,\mathsf{A}_1$ ist, der Schnittpunkt P der Gegenseiten $A\,\mathsf{A}$ und $A_1\,\mathsf{A}_1$ das Zentrum der Involution P^2 und, weil $Q^2 = A\,A_1\,.\,\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ ist, der Schnittpunkt Q der Gegenseiten $A\,A_1$ und $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ das Zentrum der Involution Q^2. P und Q sind aber als Diagonalpunkte eines Kurvenvierecks konjugierte Punkte[(92₃)]; daher[(159₂)] sind B und B_1 einander homolog in Q^2.

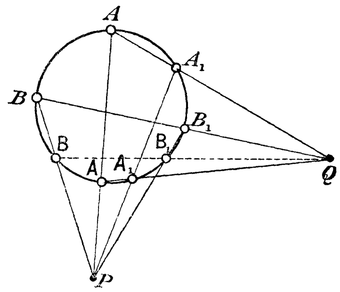

Fig. 103.

Um die Richtigkeit unsers Satzes z. B. für zwei gerade Strahleninvolutionen mit dem Mittelpunkte S darzuthun, legen wir durch S eine beliebige Kurve k^2. Diese wird von den beiden in S gegebenen Involutionen in zwei krummen Involutionen geschnitten. Da für diese krummen Involutionen der Satz bewiesen ist, gilt er auch für die in S gegebenen geraden Strahleninvolutionen.

Anmerkung. Von jetzt an werden wir unsere Sätze A
nur für krumme Punktinvolutionen beweisen und sie dann gleich als gültig für alle Involutionen aussprechen.

161. **Ordnungselemente.** Da einem Punkte P jeder 161
Punkt Q seiner Polare p konjugiert ist, so giebt es zu einer Involution $[P]$ unendlich viele resultierende $[Q]$. Ist P ein hyperbolischer Punkt, gehen also[(105₂)] durch P zwei Tangenten, die die Kurve in K und K_1 berühren, so sind K und K_1 die Ordnungspunkte der krummen Involution $[P]$[(82 Z₁)] und $K\,K_1$ ist die Polare von P[(86 Z₁)]. Das Zentrum Q jeder resultierenden Involution liegt daher, weil Q und P konjugierte Punkte sind, mit K und K_1 in einer Gerade; K und K_1 sind also homologe Punkte von $[Q]$:

1. *Die Ordnungselemente einer Involution sind einander homolog in jeder resultierenden Involution.*

Ist auch Q ein hyperbolischer Punkt, so daſs von ihm die beiden Tangenten $Q\ (L L_1)$ an die Kurve gehen, so bilden, weil $K K_1$ durch Q geht, die Ordnungselemente $K K_1 \,.\, L L_1$ einen harmonischen Wurf[(70₅)]:

2. *Die Ordnungselemente einer Involution werden durch die Ordnungselemente jeder resultierenden Involution harmonisch getrennt.*

Ist $[P]$ eine elliptische Involution, P also[(106₂)] ein elliptischer Punkt, so ist jeder Punkt Q der Polare p ein hyperbolischer Punkt[(107)]:

3. *Hat eine Involution keine Ordnungselemente, so hat jede resultierende Involution Ordnungselemente.*

162 162. **Konstruktion der resultierenden Involution.** Sind Q und R zwei beliebige Punkte, also $[Q]$ und $[R]$ zwei beliebige Involutionen, so giebt es immer eine Involution $[P]$, die eine resultierende sowohl von $[Q]$ als von $[R]$ ist. Es ist das die Involution, deren Zentrum P der Pol der Verbindungslinie $Q R$ ist. — Es genügt aber nicht zu wissen, daſs es zu zwei Involutionen immer eine gemeinsame resultierende giebt; wir müssen auch die resultierende aus den beiden komponierenden zeichnen können. Dazu müssen wir die eben angestellte Betrachtung, durch welche sich P als der Pol von $Q R$ ergab, von dem Begriffe Pol und Polare loslösen.

1. Aufgabe: *Zu zwei Involutionen die gemeinsame resultierende zu zeichnen.*

Lösung: Entspricht dem beliebigen Elemente A in der ersten gegebenen Involution Q^2 das Element A_1 und diesem in der zweiten gegebenen Involution R^2 das Element A_{12}; entspricht ferner dem Element A in R^2 das Element A_2 und diesem in Q^2 das Element A_{21}, so ordnen wir dem Elemente A das von A durch A_{12} und A_{21} harmonisch getrennte Element A zu.

Beweis: Wir haben zu zeigen, daſs die durch unsere Konstruktion einander zugeordneten Elemente A und A eine Involution bilden und daſs diese Involution eine resultierende sowohl der Involution Q^2 wie der Involution R^2 ist. — Diesen Nachweis führen wir wieder[(160 A)] für zwei krumme Involutionen $[Q]$ und $[R]$. Da nach der Konstruktion

$A A_1 . A_2 A_{21}$ (Fig. 104) Punktpaare von $[Q]$ sind, so schneiden sich die Verbindungslinien $A A_1$ und $A_2 A_{21}$ in Q; ebenso schneiden sich $A A_2$ und $A_1 A_{12}$ in R. Aus dem Schema $A A_1 A_{12} A_{21} A_2 A$ geht dann hervor[55], dafs die Tangente in A die Gerade $Q R$ in demselben Punkte S schneidet wie die Verbindungslinie $A_{12} A_{21}$. Der Punkt S bestimmt also in der Kurve eine hyperbolische Involution, von der A ein Ordnungspunkt und $A_{12} A_{21}$ zwei homologe Punkte sind. Der zweite Ordnungspunkt dieser krummen Involution $[S]$ ist der von A durch A_{12} und A_{21} harmonisch getrennte Punkt[72,9]. Das ist nach unserer Konstruktion der Punkt A. Die Verbindungslinie $A \mathsf{A}$ ist daher die Polare von S[86 Z1], und diese geht, weil S in $Q R$ liegt, durch den Pol P von $Q R$. Das durch unsere Konstruktion gewonnene Punktpaar $A \mathsf{A}$ ist mithin ein Punktpaar der krummen Involution $[P]$, und diese ist, weil P der Pol von $Q R$ ist, eine resultierende sowohl von der Involution $[Q]$ wie von der Involution $[R]$[159,1].

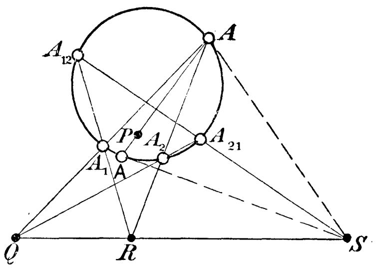

Fig. 104.

Zusatz. Um die Involutionen Q^2 und R^2 kurz bezeichnen Z
zu können, wollen wir sie *komponierende* der Involution P^2 nennen.

163. **Ordnungselemente der resultierenden Involution.** 163
Wenn eine der beiden komponierenden[162 Z] Involutionen elliptisch ist, so ist die resultierende P^2 hyperbolisch[161,3]. Es bleibt also noch die Frage nach den Ordnungselementen der resultierenden Involution zu erledigen für den Fall, dafs beide komponierende hyperbolisch sind. — Sind Q und R die Zentren der beiden komponierenden krummen Involutionen, so handelt es sich, weil das Zentrum der resultierenden Involution der Pol P von $Q R$ ist, darum, zu wissen, unter welchen Umständen die Verbindungslinie $Q R$ die Kurve schneidet. Diese Frage ist in Nr. 108 erledigt. Aus dieser Nummer ergiebt sich, dafs $Q R$ die Kurve nicht schneidet, also P ein elliptischer Punkt ist[105,3],

wenn die Ordnungselemente von $[Q]$ und $[R]$ einander trennen; trennen sie sich nicht, so ist P ein hyperbolischer Punkt.

Lehrsatz: Die resultierende Involution hat nur dann keine Ordnungselemente, wenn die beiden komponierenden Ordnungselemente haben *und* diese einander trennen.

164 164. **Staudtscher Satz.** Wir unterbrechen in dieser Nummer die Betrachtung der resultierenden Involution, um den Satz zu beweisen, auf dem v. Staudt[1] die projektive Verwandtschaft aufgebaut hat. — Wir wissen[161_2], daſs die Ordnungselemente einer Involution durch die Ordnungselemente jeder resultierenden Involution harmonisch getrennt werden. Bezeichnen wir also die Ordnungselemente der Involutionen P^2, Q^2, R^2 durch EF, AB, CD, so heiſst der vorhergehende Satz[163], losgelöst vom Begriff der resultierenden Involution:

1. Ist $AB\,.\,CD$ ein hyperbolischer Wurf, so giebt es ein Punktpaar EF, welches gleichzeitig AB und CD harmonisch trennt.

Um mit Hülfe dieses Satzes die Umkehrung von Nr. 30_5 zu beweisen, führen wir für den Augenblick das Wort *harmonische Verwandtschaft* ein durch die

2. Definition: Zwei einförmige Grundgebilde heiſsen harmonisch verwandt, wenn je vier harmonischen Elementen des einen vier harmonische des andern entsprechen.

Wir führen unsern Beweis für zwei harmonisch verwandte Punktreihen s und s_1. Wählen wir in s vier beliebige Punkte, so lassen sich aus diesen drei Würfe bilden[10_4], von denen zwei hyperbolisch sind und einer elliptisch. Bezeichnen wir die vier Punkte der Reihe nach durch $ABCD$, so sind $AB\,.\,CD$ und $AD\,.\,BC$ die hyperbolischen Würfe, während $AC\,.\,BD$ elliptisch ist. Es giebt daher zwei Punkte E und F, welche gleichzeitig AB und CD harmonisch trennen, und zwei Punkte G und H, welche gleichzeitig AD und BC harmonisch trennen. Nach der Definition müssen daher die entsprechenden Punkte E_1 und F_1 gleichzeitig die Punktpaare A_1B_1 und C_1D_1, und G_1 und H_1 gleichzeitig die Punktpaare A_1D_1 und B_1C_1 harmonisch trennen. Folglich sind $A_1B_1\,.\,C_1D_1$ und

$A_1 D_1 . B_1 C_1$ hyperbolische Würfe, $A_1 C_1 . B_1 D_1$ also ein elliptischer Wurf. Unser erstes Ergebnis ist also:

3. In zwei harmonisch verwandten Grundgebilden entspricht jedem Wurf ein gleichnamiger Wurf.

Hieraus folgt:

4. Wenn ein Punkt X die Punktreihe s im Sinne $A B C$ durchläuft, so mufs der entsprechende Punkt X_1 die Punktreihe s_1 im Sinne $A_1 B_1 C_1$ durchlaufen.

Es gelten also für harmonisch verwandte Grundgebilde dieselben Sätze, die wir in Nr. 32 benutzt haben, um zu beweisen, dafs zwei projektive Grundgebilde zusammenfallen, wenn sie drei Elemente entsprechend gemein haben. Eine Wiederholung jenes Beweises ergiebt daher:

5. Wenn zwei harmonisch verwandte Grundgebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie jedes Element entsprechend gemein. —

Schneiden wir die Träger s und s_1 zweier harmonisch verwandten Punktreihen durch eine beliebige Gerade σ in B und C_1 (vergl. Nr. 35 und Fig. 29), verbinden B mit B_1 und C_1 mit C und bezeichnen die Punkte, in denen die Verbindungslinie irgend zweier entsprechenden Punkte A und A_1 von σ, $B B_1$ und $C C_1$ geschnitten wird, durch A, S_1 und S, so erhalten wir in σ zwei harmonisch verwandte Punktreihen, wenn wir die Punktreihe s aus S und die Punktreihe s_1 aus S_1 auf σ projizieren. Die beiden in σ gewonnenen Punktreihen, die harmonisch verwandt sind, haben die drei Punkte $\mathsf{A}\, B\, C_1$ und daher jeden Punkt entsprechend gemein; es lassen sich also s und s_1 als die Endglieder einer Kette von perspektiven Gliedern auffassen; daher$^{(30_1)}$:

6. *Zwei einförmige Grundgebilde sind projektiv, wenn je vier harmonischen Elementen des einen vier harmonische Elemente des andern entsprechen.*

Zusatz. Da in zwei kongruenten Grundgebilden vier harmonischen Elementen vier harmonische Elemente entsprechen, so folgt aus dem eben bewiesenen Satze:

Kongruente Grundgebilde sind projektiv,

ein Satz, den wir früher$^{(41_{11})}$ nur durch die Geometrie des Mafses beweisen konnten.

165 165. **Kennzeichen für drei komponierende Involutionen.** Weil die aus zwei Involutionen $[Q]$ und $[R]$ resultierende $[P]$ den Pol P von QR als Zentrum hat[162], so ergeben je zwei von den drei Involutionen $[Q]\,[R]\,[S]$ dieselbe resultierende, wenn ihre Zentren QRS in einer Gerade liegen. Um diesen Satz auf beliebige Involutionen übertragen zu können, müssen wir die Bedingung, dafs die Zentren QRS in einer Gerade liegen, in eine andere Form bringen. — Sind in $[Q]\,[R]\,[S]$ dem Punkte A die Punkte $A_1\,A_2\,A_3$ und dem Punkte B die Punkte $B_1\,B_2\,B_3$ homolog, so ist $A\,B_1\,B_2\,B_3 \barwedge B\,A_1\,A_2\,A_3$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die drei Zentren QRS in einer Gerade liegen; denn projiziert man $A\,B_1\,B_2\,B_3$ aus B und $B\,A_1\,A_2\,A_3$ aus A, so erhält man zwei projektive Strahlenbüschel[50], in welchen dem Strahle $B(A)$ der Strahl $A(B)$ entspricht, so dafs die Schnittpunkte je zweier homologen Strahlen, d. h. die Involutionszentren, in einer Gerade liegen[34].

Lehrsatz: Wenn in den Involutionen $Q^2\,R^2\,S^2$ den Elementen A und B die Elemente $A_1\,A_2\,A_3$ und $B_1\,B_2\,B_3$ homolog sind, so ist $A\,B_1\,B_2\,B_3 \barwedge B\,A_1\,A_2\,A_3$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die drei Involutionen komponierende einer und derselben resultierenden Involution sind.

166 166. **Gesamtheit der komponierenden Involutionen.** Soll eine Involution $[Q]$ eine komponierende der Involution $[P]$ sein, so mufs ihr Zentrum Q in der Polare p von P liegen[159_1]; soll in ihr aufserdem dem Punkte A der Punkt A_1 homolog sein, so mufs Q in der Verbindungslinie $A\,A_1$ liegen. Q ist also bestimmt als Schnittpunkt von p und $A\,A_1$.

1. Lehrsatz: *Eine Involution ist bestimmt durch ein Elementenpaar und eine resultierende Involution.*

In Zeichen: Entsprechen den Elementen A und A_1 in der resultierenden Involution P^2 die Elemente A und A_1, so ist die durch das Elementenpaar $A\,A_1$ und die resultierende Involution P^2 bestimmte Involution $A\,A_1 \,.\, \mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$[159_2]. —

Wenn der Punkt Q die Polare p von P durchläuft, so liefert Q als Involutionszentrum sämtliche Involutionen $[Q]$, welche komponierende von $[P]$ sind. Ist G ein fester Punkt der Kurve k^2 und G_1 der Punkt, in dem die Verbindungslinie GQ die Kurve zum zweiten Male schneidet, so durchläuft G_1, wenn Q die Polare p durchläuft, die Kurve k^2. Wir erhalten daher sämtliche komponierende Punktreihen von $[P]$, wenn wir irgend einem festen Punkt G der Reihe nach alle Punkte G_1 zuordnen und die durch die Punktpaare $G\,G_1$ und $[P]$ bestimmten Involutionen konstruieren.

> 2. Lehrsatz: Man erhält die sämtlichen komponierenden einer Involution P^2, wenn man irgend einem festen Elemente G der Reihe nach sämtliche Elemente G_1 als homologe zuweist und die durch diese Zuweisungen bestimmten Involutionen konstruiert. — Wenn P^2 hyperbolisch ist, so giebt es unter den komponierenden zwei parabolische: diejenigen, für welche G_1 mit einem Ordnungselement zusammenfällt[(82$_2$)]. —

Ist H ein zweiter fester Punkt und H_1 der zweite Schnittpunkt von $H(Q)$ und k^2, so beschreiben, während Q die Polare p durchläuft, $G(Q)$ und $H(Q)$ zwei zu p perspektive Strahlenbüschel, die Punkte G_1 und H_1 also zwei projektive Punktreihen[(71)]:

> 3. *Die Elemente* G_1 *und* H_1, *welche zwei festen Elementen* G *und* H *in den komponierenden einer Involution* P^2 *homolog sind*, *sind projektiv auf einander bezogen, wenn man die Elemente* G_1 *und* H_1 *einander zuordnet, die den festen Elementen in derselben komponierenden homolog sind.* —

Sind G und H zwei *homologe* Elemente von P^2, so sind die Elemente G_1 und H_1, welche ihnen in der komponierenden Involution Q^2 homolog sind, wieder zwei homologe Elemente von P^2[(159$_2$)]:

> 4. *Die Elemente* G_1 *und* H_1, *welche zwei* homologen *Elementen* G *und* H *von* P^2 *in irgend einer komponierenden von* P^2 *homolog sind, sind Elementenpaare der Involution* P^2.

Als besondere Fälle sind noch hervorzuheben:

> 5. Fällt G_1 in H, so fällt H_1 in G; fällt G_1 in G, so fällt H_1 in H.

167. **Drei Involutionen.** Sind $A\ \mathsf{A}\ A_1\ \mathsf{A}_1$ vier beliebige 167
Punkte einer Kurve k^2, so ist der Schnittpunkt P (Fig. 105)

von $A\mathsf{A}$ und $A_1\mathsf{A}_1$ konjugiert dem Schnittpunkt Q von AA_1 und $\mathsf{A}\mathsf{A}_1$[92$_3$]; die Involution $AA_1 . \mathsf{A}\mathsf{A}_1$ ist daher eine komponierende der Involution $A\mathsf{A} . A_1\mathsf{A}_1$[159$_1$]. Dasselbe gilt von der Involution $A\mathsf{A}_1 . A_1\mathsf{A}$.

1. Von den drei Involutionen $A\mathsf{A} . A_1\mathsf{A}_1$; $AA_1 . \mathsf{A}\mathsf{A}_1$; $A\mathsf{A}_1 . A_1\mathsf{A}$ sind je zwei komponierende der dritten. —

Sind je zwei von drei krummen Involutionen $[P]\,[Q]\,[R]$ komponierende der dritten, so sind die Zentren die Ecken eines Poldreiecks[159$_1$]. Ist also A (Fig. 105) ein beliebiger Punkt von k^2, dem in $[P]\,[Q]\,[R]$ die drei Punkte $\mathsf{A}A_1\mathsf{A}_1$ homolog sind, so bilden $A\mathsf{A}A_1\mathsf{A}_1$ die Ecken eines Kurvenvierecks, von dem PQR die Diagonalpunkte sind[97$_1$]. Die drei Involutionen sind also $[P] = A\mathsf{A} . A_1\mathsf{A}_1$; $[Q] = AA_1 . \mathsf{A}\mathsf{A}_1$; $[R] = A\mathsf{A}_1 . A_1\mathsf{A}$:

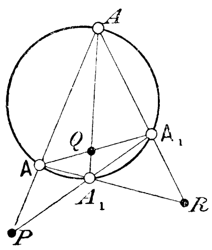

Fig. 105.

2. Wenn in drei Involutionen, von denen je zwei komponierende der dritten sind, einem Elemente A die Elemente $\mathsf{A}A_1\mathsf{A}_1$ homolog sind, so sind die drei Involutionen: $A\mathsf{A} . A_1\mathsf{A}_1$; $AA_1 . \mathsf{A}\mathsf{A}_1$; $A\mathsf{A}_1 . A_1\mathsf{A}$.

3. Wenn von drei Involutionen je zwei komponierende der dritten sind, so sind zwei dieser Involutionen hyperbolisch; die dritte ist elliptisch[69$_4$].

168 168. **Die konjugierten Involutionen der Strahlen eines Punktes.** Projizieren wir die konjugierte Involution irgend einer Gerade p aus einem beliebigen Kurvenpunkte S, so schneidet die in S gewonnene Strahleninvolution die Kurve in einer krummen Punktinvolution, deren Zentrum der Pol P von p ist[98$_5$]. Ist nun A irgend ein Punkt von p, also dem Punkte P konjugiert[92$_1$], so ist die durch das Zentrum P induzierte krumme Punktinvolution eine komponierende[162 Z] (oder, was dasselbe ist, eine resultierende) der durch das Involutionszentrum A bestimmten[159$_1$]. Dreht sich der Strahl p um A, so beschreibt der Pol P von p die Polare a von A[90$_5$]; es ergiebt sich daher, daſs die konjugierten Involutionen sämtlicher Strahlen p von A aus S durch komponierende Strahleninvolutionen projiziert werden und daſs die resultierende aus diesen komponierenden In-

volutionen die durch das Involutionszentrum A bestimmte ist. Diese resultierende wird aber aus S durch eine Involution projiziert, die perspektiv zu der konjugierten Involution der Polare a von A liegt[(98$_4$)].

Lehrsatz: Die konjugierten Punktinvolutionen der Strahlen p eines Punktes A werden aus jedem Kurvenpunkte S durch komponierende Strahleninvolutionen projiziert. Die resultierende aus diesen komponierenden ist diejenige, welche die konjugierte Punktinvolution der Polare a von A in S erzeugt. — Sie schneidet daher[(98$_5$)] die Kurve in einer krummen Punktinvolution, deren Zentrum der Punkt A ist.

Lehrsatz: Die konjugierten Strahleninvolutionen der Punkte P einer Gerade a schneiden jede Kurventangente s in komponierenden Punktinvolutionen. Die resultierende aus diesen komponierenden ist diejenige, welche die konjugierte Strahleninvolution des Poles A von a in s ausschneidet. — Sie bestimmt daher eine krumme Strahleninvolution, deren Achse die Gerade a ist.

Zusatz. Hat die konjugierte Involution irgend eines z
Strahles p von A die Ordnungspunkte K und K_1, mit andern Worten[(93$_2$)] schneidet p die Kurve in den Punkten K und K_1, so sind $S(K)$ und $S(K_1)$ homologe Strahlen der resultierenden Involution von S[(161$_1$)]. $S(K)$ und $S(K_1)$ schneiden also nach unserm Satze die Polare a von A in konjugierten Punkten. Daraus erkennen wir, daſs unser Satz eine Verallgemeinerung von Nr. 98_4 ist. Für den Fall, daſs A ein hyperbolischer Punkt ist, wuſste dieser Satz nichts auszusagen über die Strahlen, die die Kurve *nicht* schneiden; erst der Begriff der komponierenden Involution vermag diese Lücke auszufüllen. Um für den Satz einen kürzern Ausdruck zu gewinnen, führen wir die *adjungierte* Involution ein durch die

1. Definition: *Jede resultierende einer konjugierten Involution heiſst der Kurve adjungiert.*

Es schneidet also die Strahleninvolution, welche die konjugierte Involution der Gerade a aus S projiziert, irgend einen Strahl p des Poles A von a, das ist irgend eine der Gerade a konjugierte[(92$_1$)] Gerade, in einer adjungierten Involution:

2. Die Strahleninvolution, durch welche die konjugierte Punktinvolution einer beliebigen Gerade a aus irgend einem Kurvenpunkte projiziert wird, schneidet jede der Gerade a konjugierte Gerade in einer der Kurve adjungierten Involution.

2. Die Punktinvolution, in welcher die konjugierte Strahleninvolution eines beliebigen Punktes A irgend eine Tangente schneidet, wird aus jedem dem Punkte A konjugierten Punkte durch eine der Kurve adjungierte Involution projiziert.

169 169. **Verallgemeinerung des Satzes von Desargues.** $S\,S_1\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}$ (Fig. 106) seien die Ecken eines beliebigen Kurvenvierecks, p eine beliebige Gerade und P ihr Pol. Wir bezeichnen die Punkte, in denen p von den Gegenseiten $S\,\mathsf{A}$ und $S_1\,\mathsf{B}$ geschnitten wird, durch A und A_1, und die Punkte, in denen p von den Gegenseiten $S\,\mathsf{B}$ und $S_1\,\mathsf{A}$ geschnitten wird, durch B und B_1. Schliefslich mögen die Verbindungslinien $S\,A_1$ und $S\,B_1$ von der Kurve zum zweiten Male in A_1 und B_1 geschnitten werden. Es bilden dann die Kurvenpunkte $S\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}\,S_1\,\mathsf{B}\,\mathsf{B}_1$ ein Sechseck, aus dem hervorgeht[54], dafs auch die Verbindungslinien $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ und

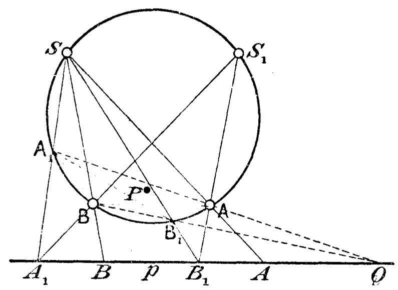

Fig. 106.

$\mathsf{B}\,\mathsf{B}_1$ sich in einem Punkte Q von p schneiden. Die krumme Involution $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1 . \mathsf{B}\,\mathsf{B}_1$, von der Q das Zentrum ist, ist, weil Q in der Polare p von P liegt, eine resultierende der krummen Involution, die durch den Pol P in der Kurve indúziert wird[159, 1]. Es wird daher aus dem Kurvenpunkte S die krumme Involution $[Q] = \mathsf{A}\,\mathsf{A}_1 . \mathsf{B}\,\mathsf{B}_1$ durch eine Strahleninvolution projiziert, die eine resultierende ist von der Strahleninvolution, durch welche die krumme Involution $[P]$ aus S projiziert wird. Diese Strahleninvolution aber schneidet p in der der Kurve konjugierten Involution von p[98, 4]; also ist die Involution $A\,A_1 . B\,B_1$, welche durch die Strahleninvolution $S\,(\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1 . \mathsf{B}\,\mathsf{B}_1)$ in p ausgeschnitten wird, eine resultierende der konjugierten Involution von p. Da $A\,A_1 . B\,B_1$ die Punkte sind, in denen zwei Paar Gegenseiten des Kurvenvierecks $S\,S_1$ A B die Gerade p schneiden, so haben wir:

1. *Die Gegenseiten eines Kurvenvierecks schneiden jede Gerade in einer Punktinvolution, die eine resultierende der konjugierten Involution dieser Gerade ist.* —	1. *Die Gegenecken eines Kurvenvierseits werden aus jedem Punkte durch eine Strahleninvolution projiziert, die eine resultierende der konjugierten Involution dieses Punktes ist.* —

Hat die konjugierte Involution der Gerade Ordnungspunkte, d. h. schneidet die Kurve die Gerade, so sind diese Schnittpunkte einander homolog in der resultierenden Involution(161₁). Es ist unser Satz also eine Verallgemeinerung des Lehrsatzes von Desargues(103). Die *allgemeinste* Form dieses Satzes wird sich uns in Nr. 194_3 ergeben. —

Mit Hülfe des Begriffs der adjungierten Involution(168 Z₁) läſst sich unser Satz so aussprechen:

2. *Die Gegenseiten eines Kurvenvierecks schneiden jede Gerade in einer der Kurve adjungierten Punktinvolution.*	2. *Die Gegenecken eines Kurvenvierseits werden aus jedem Punkte durch eine der Kurve adjungierte Strahleninvolution projiziert.*

170. **Die Hauptstrahleninvolution.** Zwei Gegenseiten 170
g^2 und h^2 und ihre diagonale Involution u^{2}(133) werden aus einem beliebigen Punkte S durch drei Strahleninvolutionen projiziert. Wir wollen beweisen, daſs diese durch zwei Gegenseiten und ihre diagonale Involution in einem beliebigen Punkte S induzierten drei Strahleninvolutionen komponierende einer und derselben resultierenden sind. Sind also in den drei Strahleninvolutionen den Strahlen a und b die Strahlen $a_1\,a_2\,a_3$ und $b_1\,b_2\,b_3$ homolog, so ist nachzuweisen(165), daſs $b\,a_1\,a_2\,a_3 \barwedge a\,b_1\,b_2\,b_3$ ist. Schneidet a die drei Träger $g\,h\,u$ in $C\,\Gamma\,A$ (Fig. 107), so liegen die drei den Punkten $C\,\Gamma\,A$ in $g\,h\,u$ homologen Punkte $C_1\,\Gamma_1\,B$ in einer Gerade α(133), und es ist der (in der Figur nicht gezeichnete) Strahl $S\;(C_1) = a_1$, $S\;(\Gamma_1) = a_2$, $S\;(B) = a_3$. Schneidet ferner ein zweiter Strahl b von S die drei Träger $g\,h\,u$ in $D\,\Delta\,A_1$, so liegen die drei den Punkten $D\,\Delta\,A_1$ in $g\,h\,u$ homologen Punkte $D_1\,\Delta_1\,B_1$ in einer Gerade β, und es ist $S\,(D_1) = b_1$, $S\,(\Delta_1) = b_2$, $S\,(B_1) = b_3$. Mit Hülfe von $a\,\alpha\,b\,\beta$ läſst sich noch zu einem dritten Strahl c von S der

zugeordnete γ konstruieren. Bezeichnen wir nämlich die Schnittpunkte $(a\,\beta)$, $(\beta\,\alpha)$, $(\alpha\,b)$ durch $P\,Q\,R$, so bilden $a\,\alpha$ und $b\,\beta$ zwei Paar Gegenseiten des Vierecks $S\,P\,Q\,R$. Da $a\,\alpha$ und $b\,\beta$ die drei Träger $g\,h\,u$ in Paaren homologer Punkte schneiden, so mufs auch das dritte Paar Gegenseiten $S\,Q = c$ und $P\,R = \gamma$ die drei Träger in Paaren homologer Punkte schneiden[64 Z]. Nun wissen wir[133 Z], dafs die den Strahlen von S zugeordneten Geraden einen krummen Strahlenbüschel bilden, dem auch $g\,h\,u$ angehören. Wir haben demnach von diesem Strahlenbüschel die sechs Strahlen $\alpha\,\beta\,\gamma\,g\,h\,u$. Da irgend zwei Strahlen eines krummen Strahlen-

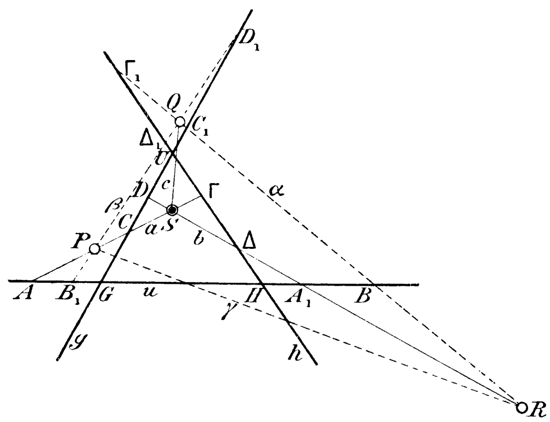

Fig. 107.

büschels von den übrigen in zwei projektiven Punktreihen geschnitten werden[50], so haben wir $\alpha\,(\gamma\,g\,h\,u) \,\overline{\wedge}\, \beta\,(\gamma\,g\,h\,u)$. Nach der Konstruktion ist γ die Verbindungslinie des Punktes $R = (b\,\alpha)$ und des Punktes $P = (a\,\beta)$. Die Punkte $\alpha\,(\gamma)$ und $\beta\,(\gamma)$ werden daher aus S durch die Strahlen b und a projiziert. Die Punkte $\alpha\,(g\,h\,u)$ sind $C_1\,\Gamma_1\,B$, sie werden daher aus S durch $a_1\,a_2\,a_3$ projiziert; ebenso werden die drei Punkte $\beta\,(g\,h\,u)$ oder $D_1\,\Delta_1\,B_1$ aus S durch $b_1\,b_2\,b_3$ projiziert. Aus $\alpha\,(\gamma\,g\,h\,u) \,\overline{\wedge}\, \beta\,(\gamma\,g\,h\,u)$ ergiebt sich daher durch Projektion aus S: $b\,a_1\,a_2\,a_3 \,\overline{\wedge}\, a\,b_1\,b_2\,b_3$.

Lehrsatz: *Zwei Gegenseiten und ihre diagonale Involution werden aus jedem Punkte durch*

Lehrsatz: *Zwei Gegenecken und ihre diagonale Involution schneiden jede Gerade in drei*

drei komponierende Strahleninvolutionen projiziert. — Die resultierende aus diesen drei Involutionen soll die Hauptstrahleninvolution des Punktes genannt werden.

komponierenden Punktinvolutionen. — Die resultierende aus diesen drei Involutionen soll die Hauptpunktinvolution der Gerade genannt werden.

Anmerkung. Haben g^2 und h^2 die Ordnungspunkte $K K_1$ A
und $L L_1$ und folglich$^{(137_2)}$ u^2 die Ordnungspunkte $V W$, so ist, weil die Ordnungselemente der komponierenden Involution homologe Elemente der resultierenden sind$^{(161_1)}$, die in S resultierende Involution $S\,(K K_1 \,.\, L L_1 \,.\, V W)$. Die Punktpaare $K K_1 \,.\, L L_1 \,.\, V W$ sind aber, wie wir wissen$^{(137_3)}$, die Gegenecken eines Vierseits. Unser Satz ist daher eine Verallgemeinerung von Nr. 64 Z: Die drei Paar Gegenecken eines Vierseits werden aus jedem Punkte durch drei Strahlenpaare einer Involution projiziert.

Zusatz. Sind (unter Einführung einer neuen Bezeichnung) Z
a und b zwei homologe Strahlen der Hauptstrahleninvolution von E, welche g in A und B und h in A und B schneiden, so sind auch die Strahlen von E, die durch die homologen Punkte A_1 und B_1 von g^2 und durch die homologen Punkte A_1 und B_1 von h^2 gehen, einander homolog in der Hauptinvolution $E^{2\,(166_4)}$. Diese Bemerkung wenden wir an auf den Strahl $E\,(U)$ und den ihm in E^2 homologen Strahl, der $g\,h$ und u in $C\,\Gamma$ und A (Fig. 108) schneiden möge; es sind dann auch $E\,(G)$ und $E\,(C_1)$, $E\,(H)$ und $E\,(\Gamma_1)$ je zwei homologe Strahlen der Hauptinvolution, so dafs wir haben $E^2 = E\,(U C \,.\, G\, C_1 \,.\, H\, \Gamma_1)$.

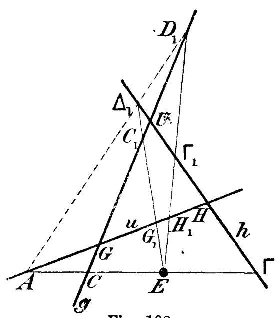

Fig. 108.

Bezeichnen wir noch den Punkt, in dem h von $E\,(C_1)$ geschnitten wird, durch Δ_1, und den Punkt, in dem g von $E\,(\Gamma_1)$ geschnitten wird, durch D_1, so wissen wir$^{(64_2)}$, weil die Strahlen $E\,(C\,C_1\,\Gamma_1)$ den durch die Ecken des Dreiecks $U\,G\,H$ gehenden Strahlen $E\,(U\,G\,H)$ homolog sind:

1. Die drei Punkte $A\,D_1\,\Delta_1$ liegen in einer Gerade.

Bezeichnen wir ferner die Punkte, in denen die Diagonale

u von den Strahlen $E(C_1)$ und $E(\Gamma_1)$ geschnitten wird, durch G_1 und H_1, so ist die von E^2 in u ausgeschnittene Punktinvolution $G\,G_1 . H\,H_1$. Diese muſs nach unserm Satze(170) eine resultierende der diagonalen Involution sein. Da nun G und H zwei homologe Punkte der diagonalen Involution sind(135₂), so müssen auch(166₄) G_1 und H_1 zwei homologe Punkte der diagonalen Involution sein:

2. Die Strahlen $E(C_1)$ und $E(\Gamma_1)$, die den Strahlen $E(G)$ und $E(H)$ in der Hauptinvolution E^2 homolog sind, schneiden die Diagonale u in zwei homologen Punkten G_1 und H_1 der diagonalen Involution;

oder

3. Die Hauptstrahleninvolution von E schneidet die Diagonale in einer komponierenden $G\,G_1 . H\,H_1$ der diagonalen Involution $G\,H . G_1\,H_1$.

---

§ 14. Konjugierte Projektivitäten.

171 171. **Zwei Kurven in doppelter Berührung.** Ist uns in einer Kurve k^2 die krumme Projektivität $S\mathsf{A}\mathsf{B}\ldots \barwedge S_1\mathsf{A}_1\mathsf{B}_1\ldots$ gegeben, so ist durch sie die Projektionsachse p als Pascalsche Gerade des Kurvensechsecks $S\,\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}\,S_1\,\mathsf{A}\,\mathsf{B}_1$(73) und das Projektionszentrum P als Brianchonscher Punkt des zugeordneten Kurvensechsseits $s\,\alpha_1\,\beta\,s_1\,\alpha\,\beta_1$(76) bestimmt, also

die Projektionsachse als Verbindungslinie der Schnittpunkte $(S\,\mathsf{A}_1)\,(S_1\,\mathsf{A})$ und $(\mathsf{B}\,S_1)\,(\mathsf{B}_1\,S)$,

das Projektionszentrum als Schnittpunkt der Verbindungslinien $(s\,\alpha_1)\,(s_1\,\alpha)$ und $(\beta\,s_1)\,(\beta_1\,s)$.

Daraus ergiebt sich(86 u. 87):

1. Die Projektionsachse ist die Polare des Projektionszentrums;

oder auch:

2. Die Pascalsche Gerade eines Kurvensechsecks ist die Polare des Brianchonschen Punktes des zugeordneten Sechsseits. —

Den Schnittpunkt von $S\,\mathsf{A}_1$ und $S_1\,\mathsf{A}$, der in der Projektionsachse p liegt(73), wollen wir durch X; den Punkt, in dem sich die Verbindungslinien homologer Punkte $S\,S_1$ und $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ schneiden, durch Y und den dritten Diagonalpunkt des

Kurvenvierecks $S S_1 \mathsf{A} \mathsf{A}_1$ durch Z bezeichnen. Halten wir die Punkte S und S_1 fest und lassen X sich in p bewegen, so beschreibt die Diagonallinie $x = YZ$, weil sie die Polare von X ist(85₁), einen zu X projektiven Strahlenbüschel(90₃) und der Punkt Y, in dem $\mathsf{A} \mathsf{A}_1$ die feste Gerade $S S_1$ schneidet, eine zu X projektive Punktreihe.

Gehen wir nicht von den Punkten S und S_1, sondern von irgend zwei andern festen homologen Punkten L und L_1 der gegebenen krummen Projektivität aus, so dafs sich $L \mathsf{A}_1$ und $L_1 \mathsf{A}$ in einem Punkte X_1 von p schneiden(73), so beschreibt die Diagonallinie $Y_1 Z_1$ des Kurvenvierecks $L L_1 \mathsf{A} \mathsf{A}_1$ einen zu X_1 projektiven Strahlenbüschel und der Punkt Y_1, in dem $\mathsf{A} \mathsf{A}_1$ die feste Gerade $L L_1$ schneidet, beschreibt eine zu X_1 projektive Punktreihe. Wir haben also:

$$Y_1 \,\overline{\wedge}\, X_1 \,\overline{\overline{\wedge}}\, L_1 (\mathsf{A}) \overset{(50)}{\overline{\wedge}} S_1 (\mathsf{A}) \,\overline{\overline{\wedge}}\, X \,\overline{\wedge}\, Y.$$

Die Verbindungslinie $Y Y_1$, das ist die Gerade $\mathsf{A} \mathsf{A}_1$, beschreibt daher einen krummen Strahlenbüschel μ_1^2(42). —

Es läfst sich ferner zeigen, dafs die Gerade x, welche nach der Konstruktion die Polare des Punktes X für die Kurve k^2 ist, auch für den krummen Strahlenbüschel $\mu_1{}^2$ die Polare des Punktes X ist. — Weil x von X durch die Gegenseiten $S S_1$ und $\mathsf{A} \mathsf{A}_1$ des Vierecks $S S_1 \mathsf{A} \mathsf{A}_1$ harmonisch getrennt ist(24₂), so ist $Y(X)$ eine der Gerade x für $\mu_1{}^2$ konjugierte Gerade(92₄). Schneidet $L_1(X)$ die Kurve zum zweiten Male in B, so schneidet $L(X)$ die Kurve zum zweiten Male im homologen Punkte B_1(73). Von dem Kurvenviereck $L L_1 \mathsf{B} \mathsf{B}_1$ ist X der eine Diagonalpunkt; bezeichnen wir die beiden andern durch Y_2 und Z_2, so fallen(85) Y_2 und Z_2 in die Polare x des Punktes X für k^2; der Gerade x ist daher(92₄) auch $Y_2(X)$ für $\mu_1{}^2$ konjugiert. Folglich(92₂) ist X der Pol von x für $\mu_1{}^2$. Da demnach die Polaren x der Punkte X von p für k^2 und $\mu_1{}^2$ zusammenfallen, so haben k^2 und $\mu_1{}^2$ die konjugierte Punktinvolution von p und die konjugierte Strahleninvolution von P gemeinsam.

3. *Die Geraden, welche die homologen Punkte einer krummen Projektivität von* k^2 *verbinden, bilden einen krummen Strahlenbüschel* $\mu_1{}^2$. *Die krumme Punkt-*

3. *Die Punkte, in denen sich die homologen Tangenten einer krummen Projektivität von* k^2 *schneiden, bilden eine krumme Punktreihe* $\mathrm{n}_1{}^2$. *Die beiden*

reihe k^2 *und der krumme Strahlenbüschel* $\mu_1{}^2$ *haben die konjugierten Involutionen der Projektionsachse und des Projektionszentrums gemeinsam.* —

krummen Punktreihen k^2 *und* $\mathrm{n}_1{}^2$ *haben die konjugierten Involutionen des Projektionszentrums und der Projektionsachse gemeinsam.* —

Schneidet die Verbindungslinie der homologen Punkte S und S_1 die Projektionsachse p in E, so geht die Polare von E für k^2 nach unserm ersten Satze durch das Projektionszentrum P und[86_2] den Punkt E_1, welcher von E durch S und S_1 harmonisch getrennt ist. Diese Verbindungslinie PE_1 ist auch die Polare von E für die Kurve $\mu_1{}^2$, und da sie durch den Pol von SS_1, das ist[87_2] durch den Berührungspunkt von SS_1, geht, so ist E_1 der Berührungspunkt von SS_1:

4. *Die Punkte, welche von der Projektionsachse durch die homologen Punkte der Projektivität harmonisch getrennt sind, bilden die krumme Punktreihe* $\mathrm{m}_1{}^2$. —

4. *Die Strahlen, welche von dem Projektionszentrum durch die homologen Tangenten der Projektivität harmonisch getrennt sind, bilden einen krummen Strahlenbüschel* $\nu_1{}^2$. —

Da der Schnittpunkt homologer Tangenten s und s_1 der Pol der Verbindungslinie homologer Punkte S und S_1 ist[87 Z_1], so gehen die Kurven $\mu_1{}^2$ und $n_1{}^2$ ($m_1{}^2$ und $\nu_1{}^2$) durch Polarisation vermittelst der Kurve k^2[91 Z] auseinander hervor.

A *Anmerkung*. Hat die konjugierte Involution von p Ordnungspunkte und folglich[92_6] die konjugierte Involution von P Ordnungsstrahlen, so haben k^2 und $\mu_1{}^2$ zwei Punkte und ihre Tangenten gemeinsam[93_2]. Von zwei Kurven, die einen Punkt und seine Tangente gemeinsam haben, sagt man, dafs sie sich berühren. k^2 und $\mu_1{}^2$ ($m_1{}^2$) sind also zwei Kurven in *doppelter Berührung*.

172 172. **Büschel von Kurven in doppelter Berührung.** Weisen wir dem Punkte S von k^2 nicht den Punkt S_1, sondern irgend einen andern Punkt S_2 von k^2 als homologen zu, so können wir eine Projektivität konstruieren, für die p ebenfalls die Projektionsachse ist. Wir haben nur einem beliebigen Punkte A den Punkt A_2 zuzuordnen, den wir erhalten, wenn wir den Schnittpunkt von $S_2\mathsf{A}$ und p aus S auf die Kurve projizieren. Die Verbindungslinien der homologen Punkte A und A_2 bilden einen krummen Strahlen-

büschel $\mu_2{}^2$, der ebenfalls mit k^2 die konjugierte Involution von p und P gemeinsam hat. Jedem weitern Punkte S_3 entspricht ein neuer Strahlenbüschel $\mu_3{}^2$.

1. Die Gesamtheit dieser krummen Büschel μ^2 nennt man einen *Büschel von Kurven in doppelter Berührung*.

2. Ordnet man dem Punkte S den Punkt S' zu, der mit S und P in einer Gerade liegt, so geht die Verbindungslinie homologer Punkte A und A′ durch P[97_1] und aus der Projektivität wird eine Involution; der krumme Büschel μ'^2 zerfällt in den geraden Büschel P.

3. Ordnet man dem Punkte S den Punkt S selbst zu, so fällt auch jeder andre Punkt A mit seinem homologen zusammen; die Kurve μ^2 ist der Tangentenbüschel von k^2. — Die Kurve k^2, von der wir ausgingen, ist also als eine Kurve des Büschels zu zählen.

173. **Büschel von Projektivitäten.** Ist uns in k^2 173
eine krumme Projektivität gegeben, so können wir[172], indem wir den Punkt S_1 auf k^2 sich bewegen lassen, für jede Lage des Punktes S_1 eine krumme Projektivität konstruieren, die mit der gegebenen die Projektionsachse (und das Projektionszentrum) gemeinsam hat.

1. Den Inbegriff der krummen Projektivitäten, die die Projektionsachse gemeinsam haben, wollen wir einen *Büschel von Projektivitäten* nennen. — Unter den Projektivitäten eines Büschels befindet sich eine Involution[172_2].

Um nun unsere Betrachtungen auf beliebige Projektivitäten übertragen zu können, müssen wir sie von dem Begriffe der Projektionsachse befreien. Dazu gelangen wir auf folgendem Wege.

Jedes Element einer Projektivität ist, weil es zum ersten oder zweiten der die Projektivität erzeugenden Grundgebilde gerechnet werden kann, als ein zweifaches aufzufassen. Einem beliebigen Elemente A (Fig. 109) entspricht daher, wenn wir es zum ersten Grundgebilde rechnen, ein Element A_1 und, wenn wir es zum zweiten Grundgebilde rechnen, ein von A_1 verschiedenes Element A_2; entspricht außerdem noch dem beliebigen Elemente B als Element des ersten Grundgebildes das Element B_1, so ist die Projektivität durch $\mathsf{A\,B\,A_2} \barwedge \mathsf{A_1\,B_1\,A}$ bestimmt[33, 2]. Nehmen wir an, dafs unsere Projektivität eine krumme Punktprojektivität ist, so ergiebt sich die Projektionsachse[73] aus dem Schema:

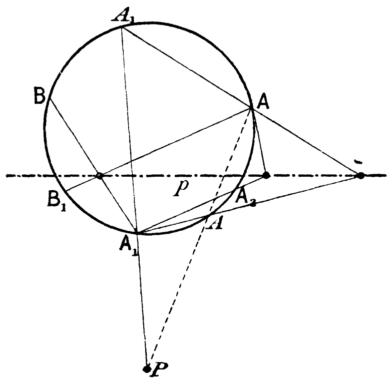

Fig. 109.

$$\mathsf{A\,B_1\,A_2\,A_1\,B\,A}.$$

Zeichnen wir nun den von A durch $\mathsf{A_1}$ und $\mathsf{A_2}$ harmonisch getrennten Punkt A, so gehen die Tangenten von A und A durch den Punkt[70, 4], in dem die Projektionsachse von $\mathsf{A_1\,A_2}$ geschnitten wird. Die Verbindungslinie $\mathsf{A}\,A$ geht daher als Polare dieses Schnittpunktes[86 Z, 1] durch den Pol P von p, das Projektionszentrum[171, 1]. Daher[82]:

2. Zeichnen wir zu jedem Elemente A einer Projektivität das von ihm durch $\mathsf{A_1}$ und $\mathsf{A_2}$ harmonisch getrennte Element A, so sind A und A Elementenpaare einer Involution. Diese Involution soll die der Projektivität *harmonisch zugeordnete* Involution heifsen. Das Element A wollen wir kurz das dem Elemente A harmonisch zugeordnete nennen.

3. Definition: Der Inbegriff der Projektivitäten, die die harmonisch zugeordnete Involution gemeinsam haben, heifst ein *Büschel von Projektivitäten.* —

Zum Punkte A (Fig. 109) finden wir den homologen Punkt A_1 der Projektivität, indem wir den Punkt, in dem $\mathsf{A_1}\,A$ die Projektionsachse schneidet, mit A verbinden und den zweiten Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit der Kurve bestimmen[73]. Da $\mathsf{A_1}\,A_1$ durch P geht[97, 1], so haben wir:

4. *Sind* A *und* $\mathsf{A_1}$ *zwei homologe Elemente einer Projektivität und* A *und* A_1 *die ihnen harmonisch zugeordneten, so ist in der Projektivität dem Elemente* A *das Element* A_1 *homolog.* —

Mit Hülfe dieses Satzes läfst sich beweisen:

5. *Eine Projektivität ist bestimmt, wenn ein Elementenpaar* $\mathsf{A}\,\mathsf{A}_1$ *und die harmonisch zugeordnete Involution gegeben ist.*

Konstruktion der Projektivität: Da die harmonisch zugeordnete Involution gegeben ist, so sind die den Elementen A und A_1 harmonisch zugeordneten Elemente A und A_1 bekannt; sie bilden, wie wir eben gesehen haben, ein zweites Elementenpaar der Projektivität. Konstruieren wir noch das von A_1 durch A und A harmonisch getrennte Element A_2, so ist diesem das Element A homolog, so daſs die Projektivität bestimmt ist durch $\mathsf{A}\,A\,\mathsf{A}_2 \barwedge \mathsf{A}_1\,A_1\,\mathsf{A}$. —

6. Wir erhalten sämtliche Projektivitäten eines Büschels, wenn wir einem festen Elemente A der Reihe nach sämtliche Elemente A_1 zuordnen. Fällt A_1 in das Element A, welches dem Elemente A in der harmonisch zugeordneten Involution homolog ist, so fällt die Projektivität mit der harmonisch zugeordneten Involution zusammen.

174. Konjugierte Projektivitäten. 174

1. Definition: Projizieren wir die Kurvenpunkte A aus irgend zwei festen Kurvenpunkten S und S_1, so erhalten wir in S und S_1 zwei projektive[50] Strahlenbüschel, die jede Gerade p in einer Projektivität schneiden. Diese gerade Punktprojektivität von p soll der Kurve *konjugiert* heiſsen. —

1. Definition: Schneiden wir die Kurventangenten α durch irgend zwei feste Tangenten s und s_1, so erhalten wir in s und s_1 zwei projektive Punktreihen, die aus jedem Punkte P durch eine Projektivität projiziert werden. Diese gerade Strahlenprojektivität von P soll der Kurve *konjugiert* heiſsen. —

Durch die Gerade p als Projektionsachse ist in der Kurve ein Büschel von krummen Projektivitäten bestimmt[173_1]; jeder krummen Projektivität des Büschels ist eine gerade Projektivität in der Achse zugeordnet[77_1], die wir erhalten, indem wir die Kurvenpunkte aus irgend zwei homologen Punkten der krummen Projektivität auf die Achse projizieren; die den krummen Projektivitäten des Büschels zugeordneten geraden Projektivitäten der Achse sind also der Kurve konjugiert:

2. Die der Kurve konjugierten Punktprojektivitäten einer Gerade bilden einen Büschel. —

2. Die der Kurve konjugierten Strahlenprojektivitäten eines Punktes bilden einen Büschel. —

Da unter den krummen Projektivitäten des Büschels eine Involution ist[172$_2$], so ist auch unter den geraden Projektivitäten der Achse eine Involution; es ist dieselbe, die wir bereits früher die der Kurve konjugierte Involution von p genannt haben[98$_2$]:

3. Die einer konjugierten Punktprojektivität harmonisch zugeordnete Involution ist die konjugierte Punktinvolution der Gerade.

3. Die einer konjugierten Strahlenprojektivität harmonisch zugeordnete Involution ist die konjugierte Strahleninvolution des Punktes.

4. Sind A und A_1 zwei homologe Punkte einer konjugierten Projektivität, so sind auch die A und A_1 konjugierten Punkte einander homolog in der Projektivität[173$_4$].

4. Sind a und a_1 zwei homologe Strahlen einer konjugierten Projektivität, so sind auch die a und a_1 konjugierten Strahlen einander homolog in der Projektivität.

5. Ist uns eine konjugierte Projektivität gegeben, so können wir aus ihr die konjugierte Involution zeichnen[173$_2$].

6. Durch die konjugierte Involution und ein Elementenpaar ist eine konjugierte Projektivität bestimmt[173$_3$].

175 **175. Perspektive Lage zugeordneter Projektivitäten.** Einer krummen Projektivität ist in der Projektionsachse p eine gerade Punktprojektivität und in dem Projektionszentrum P eine gerade Strahlenprojektivität zugeordnet[77]. Wir wollen zeigen, dafs diese beiden geraden Projektivitäten perspektiv liegen.

Sind A und A_1 (Fig. 110) zwei beliebige homologe Punkte der krummen Projektivität und S ein beliebiger Kurvenpunkt, so liefern uns $S(\mathsf{A})$ und $S(\mathsf{A}_1)$ in der Projektionsachse p die homologen Punkte A und A_1[77$_1$]. Es ist zu beweisen, dafs $P(A)$ und $P(A_1)$ zwei homologe Strahlen der Projektivität von P sind. Ist B der dem Punkte A konjugierte[92$_1$] Punkt von p, so dafs B der Pol von $P(A)$ ist, so ist BS die Polare des Punktes E, in dem die

Tangente in S von PA geschnitten wird, und schneidet die Kurve in einem Punkte B, der der Berührungspunkt der zweiten von E an die Kurve gezogenen Tangente β ist[86 Z_1]; die Verbindungslinie $\mathsf{A}\,\mathsf{B}$ geht durch P[98_5]. — Ist nun B_1 der dem Punkte A_1 konjugierte Punkt, so ist B_1 dem Punkte B in der Projektivität homolog[174_4]; $S(B_1)$ schneidet daher die Kurve in dem Punkte B_1, der in der krummen Projektivität dem Punkte B homolog ist. Die Tangenten β und β_1 schneiden daher die Tangente s in zwei Punkten E und E_1, die aus P durch homologe Strahlen der Projektivität von P projiziert werden[77_2]. Weil aber E_1 der Pol von $S(B_1)$ ist[87 Z_1], so liegt E_1 in der Polare von B_1; diese Polare ist aber PA_1[92_2].

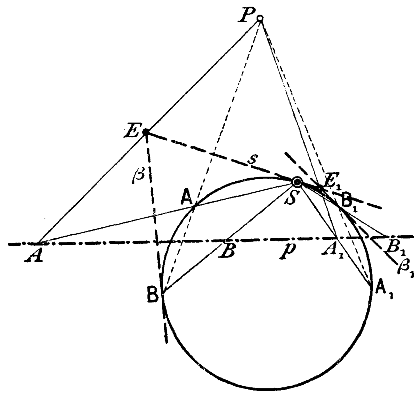

Fig. 110.

Die homologen Strahlen $P(E)$ und $P(E_1)$ der Projektivität von P gehen also durch A und A_1:

Die geraden Projektivitäten, welche einer krummen Projektivität in der Projektionsachse und in dem Projektionszentrum zugeordnet sind[77]*, liegen perspektiv.*

Anmerkung. Von diesem Satze ist Nr. 92_6 ein besonderer Fall. A

176.* Zirkulare Projektivitäten. 176

1. Definition: Eine Punktprojektivität der uneigentlichen Gerade, der die zirkulare Punktinvolution[112_1] harmonisch zugeordnet ist, soll eine *zirkulare Punktprojektivität* heifsen; eine Strahlenprojektivität, die perspektiv zu einer zirkularen Punktprojektivität liegt, soll eine *zirkulare Strahlenprojektivität* heifsen.

2. Jede Kurve, der eine zirkulare Punktprojektivität konjugiert ist, ist ein Kreis[174_3]. —

Eine zirkulare Punktprojektivität ist bestimmt durch zwei homologe Punkte A und A_1[173_5]. Projizieren wir diese aus einem beliebigen Punkte S durch die Strahlen α und α_1, so schneiden die in S auf α und α_1 errichteten Lote a und a_1 die uneigentliche Gerade in den Punkten A und A_1, die den Punkten A und A_1 in der zirkularen Punktinvolution homolog sind[112,2] und daher[173,5] ein zweites Punktpaar der Projektivität bilden. Schliefslich schneidet der von α_1 durch α und a harmonisch getrennte Strahl α_2 die uneigentliche Gerade in einem Punkte A_2, dem der Punkt A homolog ist, so dafs die Punktprojektivität bestimmt ist durch $\mathsf{A}\,A\,\mathsf{A}_2 \barwedge \mathsf{A}_1 A_1 \mathsf{A}$. Gleichzeitig haben wir die zirkulare Strahlenprojektivität $\alpha\, a\, \alpha_2 \barwedge \alpha_1\, a_1\, \alpha$ erhalten. In dieser ist Winkel $\alpha\, \alpha_1 = a\, a_1$, weil die Schenkel aufeinander senkrecht stehen. Da $\alpha\, a \,.\, \alpha_1\, \alpha_2$ ein harmonischer Wurf ist und α senkrecht auf a steht, so ist $\angle\, \alpha\, \alpha_1 = \alpha_2\, \alpha$[28,3]:

3. *Die Strahlen einer zirkularen Strahlenprojektivität bilden mit ihren homologen gleiche Winkel* — oder

Zwei Strahlenbüschel, die eine zirkulare Projektivität erzeugen, sind einander kongruent.

Daraus ergiebt sich weiter:

4. *Zwei Winkel sind gleich, wenn ihre Schenkel die uneigentliche Gerade in zwei Paar homologen Punkten einer zirkularen Punktprojektivität schneiden.*

Dies ist in anderer Form der planimetrische Satz über die Gleichheit der Peripheriewinkel.

Da die konjugierte Involution eines Brennpunktes zirkular ist[142,2], so ergiebt sich:

5. Die konjugierten Strahlenprojektivitäten eines Brennpunktes sind zirkular.

Aus diesem Satze ergiebt sich[174,1] eine Folgerung, die in der Geometrie des Mafses so ausgesprochen wird:

6. Die Strecke, welche von zwei festen Tangenten auf einer beweglichen Tangente begrenzt wird, erscheint im Brennpunkt unter einem konstanten Winkel.

---

§ 15. Kollineare und reziproke Verwandtschaft.

177 177. **Kollineare Verwandtschaft.** Der Inbegriff der Punkte und Geraden einer Ebene heifst ein ebenes System oder *Feld*. Wie wir bisher die Punkte zweier Geraden oder

die Strahlen zweier Punkte aufeinander bezogen haben, so lassen sich auch, wie wir jetzt zeigen wollen, die Punkte und Geraden zweier ebenen Felder σ und σ_1 aufeinander beziehen. Hier bieten sich zwei Wege dar: Wir können jedem Punkte des ebenen Feldes σ einen Punkt des ebenen Feldes σ_1 und jeder Gerade von σ eine Gerade von σ_1 zuordnen; wir können aber auch jedem Punkte von σ eine Gerade von σ_1 und jeder Gerade von σ einen Punkt von σ_1 zuordnen. Danach unterscheiden wir zwei Verwandtschaften, die die *kollineare* und die *reziproke* genannt werden. Wir betrachten zunächst die kollineare Verwandtschaft zweier ebenen Felder, die wir so definieren:

1. Definition: *Zwei ebene Felder σ und σ_1 heifsen kollinear, wenn jeder Gerade e von σ eine Gerade e_1 von σ_1 zugeordnet ist und jedem in e liegenden Punkte F ein in e_1 liegender Punkt F_1.*

Wir können zeigen, dafs durch unsere Definition vier harmonischen Punkten (Strahlen) der einen Ebene vier harmonische Punkte (Strahlen) der andern zugewiesen sind. Sind $PQ.WW'$ vier harmonische Punkte von σ, die in der Gerade t liegen, so entsprechen ihnen nach der Definition vier Punkte $P_1 Q_1 . W_1 W'_1$, die in einer Gerade t_1 liegen. Konstruieren wir nun in σ ein Viereck $\Delta \mathsf{A} \mathsf{B} \Gamma$[17], von dem P und Q zwei Diagonalpunkte sind, während W und W' auf den Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes R liegen, so entspricht diesem nach der Definition ein Viereck $\Delta_1 \mathsf{A}_1 \mathsf{B}_1 \Gamma_1$, von dem P_1 und Q_1 zwei Diagonalpunkte sind, während W_1 und W'_1 auf den Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes liegen, da z. B. den beiden Gegenseiten, die sich in P schneiden, zwei Geraden entsprechen müssen, die sich in P_1 schneiden. Es bilden also auch $P_1 Q_1 . W_1 W'_1$ einen harmonischen Wurf. Daraus folgt, dafs auch vier harmonischen Strahlen des einen Feldes vier Strahlen des andern homolog sind, die ebenfalls einen harmonischen Wurf bilden. Aus Nr. 164_6 ergiebt sich demnach, dafs die homologen geraden Grundgebilde zweier kollinearen Felder projektiv sind.

Auch zwei homologe *krumme* Grundgebilde sind projektiv; denn den Punkten einer Kurve k^2 z. B., die durch die beiden projektiven Strahlenbüschel S und S' erzeugt wird, sind die Schnittpunkte zweier projektiven Strahlenbüschel S_1 und S'_1 homolog. Wir haben daher:

2. *Homologe einförmige Grundgebilde zweier kollinearen Felder sind projektiv.*

178 178. **Konstruktion zweier kollinearen Felder.**

1. Aufgabe: Zwei ebene Felder kollinear aufeinander zu beziehen.

Es bieten sich zwei Wege dar:

Wir wählen in dem ebenen Felde σ zwei beliebige Geraden a und α und in σ_1 zwei beliebige Geraden a_1 und α_1 und ordnen der Gerade a die Gerade a_1 und der Gerade α die Gerade α_1 zu. Dem Schnittpunkte P von a und α muſs der Punkt entsprechen, der sowohl in a_1 als in α_1 liegt, also der Schnittpunkt P_1 von a_1 und α_1. Nun beziehen wir die Punktreihe a projektiv(31) so auf a_1, daſs dem Punkte P der Punkt P_1 und auſserdem zwei beliebigen Punkten $\mathsf{\Delta}$ und A von a zwei beliebige Punkte $\mathsf{\Delta}_1$ und A_1 von a_1 entsprechen. Ebenso beziehen wir die Punktreihen α und α_1 projektiv so aufeinander, daſs dem Punkte P der Punkt P_1 und auſserdem zwei beliebigen Punkten B und $\mathsf{\Gamma}$ von α zwei beliebige Punkte B_1 und $\mathsf{\Gamma}_1$ von α_1 entsprechen.

Damit ist jedem Punkte von a und α ein bestimmter Punkt von a_1 und α_1 zugewiesen und wir können nun weiter festsetzen, daſs einer

Wir wählen in dem ebenen Felde σ zwei beliebige Punkte A und A und in σ_1 zwei beliebige Punkte A_1 und A_1 und ordnen dem Punkte A den Punkt A_1 und dem Punkte A den Punkt A_1 zu. Der Verbindungslinie p von A und A muſs die Gerade entsprechen, die sowohl durch A_1 als durch A_1 geht, d. h. die Verbindungslinie p_1 von A_1 und A_1. Nun beziehen wir den Strahlenbüschel A projektiv so auf den Strahlenbüschel A_1, daſs dem Strahle p der Strahl p_1 und auſserdem zwei beliebigen Strahlen δ und α von A zwei beliebige Strahlen δ_1 und α_1 von A_1 entsprechen. Ebenso beziehen wir die Strahlenbüschel A und A_1 so aufeinander, daſs dem Strahle p der Strahl p_1 und auſserdem zwei beliebigen Strahlen β und γ von A zwei beliebige Strahlen β_1 und γ_1 von A_1 entsprechen.

Damit ist jedem Strahle von A und A ein bestimmter Strahl von A_1 und A_1 zugewiesen und wir können nun weiter festsetzen, daſs einem beliebigen Gerade e von σ, die a und α in E und E schneidet, die Gerade e_1 von σ_1 zugeordnet sein soll, die die zugeordneten Punkte E_1 und E_1 von a_1 und α_1 miteinander verbindet.

Lassen wir den Strahl e um einen beliebigen Punkt F sich drehen, so beschreiben E und E zwei projektive Punktreihen und folglich auch E_1 und E_1, und zwar liegen die Punktreihen E_1 und E_1 perspektiv, weil E_1 und E_1 gleichzeitig in P_1 fallen, nämlich dann, wenn der Strahl e durch P geht. Die Verbindungslinie e_1 von E_1 und E_1 dreht sich daher um einen Punkt F_1[34] und dieser soll dem Punkte F zugeordnet werden.

Damit haben wir jeder Gerade e von σ eine Gerade e_1 von σ_1 und jedem Punkte F von σ einen Punkt F_1 von σ_1 zugewiesen und zwar derart, daſs jedem in e liegenden Punkte F ein in e_1 liegender Punkt F_1 entspricht.

beliebigen Punkte E von σ, der aus A und A durch die Strahlen e und ε projiziert wird, der Punkt E_1 von σ_1 zugeordnet sein soll, in dem sich die zugeordneten Strahlen e_1 und ε_1 von A_1 und A_1 schneiden.

Lassen wir den Punkt E in einer beliebigen durch ihn gehenden Gerade f sich bewegen, so beschreiben e und ε zwei projektive Strahlenbüschel und folglich auch e_1 und ε_1, und zwar liegen die Strahlenbüschel e_1 und ε_1 perspektiv, weil e_1 und ε_1 gleichzeitig in p_1 fallen, nämlich dann, wenn der Punkt E in p fällt. Der Schnittpunkt E_1 von e_1 und ε_1 bewegt sich daher in einer Gerade f_1 und diese soll der Gerade f zugeordnet werden.

Damit haben wir jedem Punkte E von σ einen Punkt E_1 von σ_1 und jeder Gerade f von σ eine Gerade f_1 von σ_1 zugewiesen und zwar derart, daſs jeder durch E gehenden Gerade f eine durch E_1 gehende Gerade f_1 entspricht.

Da die Schnittpunkte $P = a\,\alpha$ und $P_1 = a_1\,\alpha_1$, wie wir sahen, einander zugewiesen werden muſsten, so ist die projektive Beziehung von a und a_1 dadurch bestimmt, daſs wir zwei beliebigen Punkten $\mathsf{\Delta}$ und $\mathsf{\Gamma}$ von a zwei beliebige Punkte $\mathsf{\Delta}_1$ und $\mathsf{\Gamma}_1$ von a_1 zuwiesen; ebenso ist die projektive Beziehung von α und α_1 dadurch bestimmt, daſs wir zwei beliebigen Punkten B und $\mathsf{\Gamma}$ von α zwei beliebige Punkte B_1 und $\mathsf{\Gamma}_1$ von α_1 zuwiesen. Da nun mit den Punkten $\mathsf{\Delta}\,\mathsf{A}$ und $\mathsf{\Delta}_1\,\mathsf{A}_1$ auch die Geraden a und a_1 und mit $\mathsf{B}\,\mathsf{\Gamma}$ und $\mathsf{B}_1\,\mathsf{\Gamma}_1$ auch die Geraden α und α_1 gegeben sind, so sind die Stücke, die wir willkürlich annehmen können, die vier Punkte $\Delta\, \mathsf{A}\, \mathsf{B}\, \Gamma$ von σ und die vier Punkte $\Delta_1\, \mathsf{A}_1\, \mathsf{B}_1\, \Gamma_1$ von σ_1.

2. *Die kollineare Verwandtschaft zweier ebenen Felder ist bestimmt, wenn den Ecken eines Vierecks von σ die Ecken eines Vierecks von σ_1 zugewiesen werden.*

2. *Die kollineare Verwandtschaft zweier ebenen Felder ist bestimmt, wenn den Seiten eines Vierseits von σ die Seiten eines Vierseits von σ_1 zugewiesen werden.*

179 179. **Reziproke Verwandtschaft.** Wichtiger als die kollineare Verwandtschaft ist für uns die reziproke.

1. Definition: *Zwei ebene Felder σ und σ_1 heifsen reziprok, wenn jeder Gerade e von σ ein Punkt E_1 von σ_1 und jedem in e liegenden Punkte F eine durch E_1 gehende Gerade f_1 entspricht.*

Auch(177) hier entsprechen vier harmonischen Punkten $PQ.WW'$ (vier harmonischen Strahlen $pq.ww'$) von σ vier harmonische Strahlen $p_1\, q_1 . w_1\, w'_1$ (vier harmonische Punkte $P_1\, Q_1 .\ W_1\, W'_1$) von σ_1. Denn dem Viereck $\Delta\, \mathsf{A}\, \mathsf{B}\, \Gamma$ von σ, von welchem P und Q zwei Diagonalpunkte sind, während W und W' auf den Gegenseiten des dritten Diagonalpunktes liegen, entspricht nach der Definition in σ_1 ein Vierseit $\delta_1\, \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$, von dem p_1 und q_1 zwei Diagonallinien sind, während w_1 und w'_1 durch die Gegenecken der dritten Diagonallinie gehen. Daraus ergiebt sich dann(164₆) der

2. Lehrsatz: *Homologe einförmige Grundgebilde zweier reziproken Felder sind projektiv.*

180 180. **Konstruktion zweier reziproken ebenen Felder.**

1. Aufgabe: Zwei ebene Felder reziprok aufeinander zu beziehen.

Wir wählen in der Ebene σ zwei beliebige Geraden a und α und in der Ebene σ_1 zwei beliebige Punkte A_1 und A_1 und ordnen der Gerade a den Punkt A_1 und der Gerade α den Punkt A_1 zu. Dem Schnittpunkte P von a und α mufs die Gerade entsprechen, die sowohl durch A_1 als durch A_1 geht, d. h. die Verbindungslinie p_1 von A_1 und A_1. Nun beziehen wir die Punktreihe a projektiv so auf den Strahlenbüschel A_1, dafs dem Punkt P der Strahl p_1 und aufserdem zwei beliebigen Punkten $\mathsf{\Delta}$ und A von a zwei beliebige Strahlen δ_1 und α_1 von A_1 entsprechen. Ebenso beziehen wir die Punktreihe α und den Strahlenbüschel A_1 projektiv so aufeinander, daſs dem Punkte P der Strahl p_1 und auſserdem zwei beliebigen Punkten B und $\mathsf{\Gamma}$ von α zwei beliebige Strahlen β_1 und γ_1 von A_1 entsprechen.

Damit ist jedem Punkte von a und α ein bestimmter Strahl von A_1 und A_1 zugewiesen, und wir können nun weiter festsetzen, daſs einer beliebigen Gerade e von σ, die a und α in E und E schneidet, der Punkt E_1 von σ_1 zugeordnet sein soll, in dem sich die zugeordneten Strahlen e_1 und ε_1 von A_1 und A_1 schneiden.

Lassen wir den Strahl e um den Punkt F sich drehen, so beschreiben E und E zwei projektive Punktreihen und folglich e_1 und ε_1 zwei projektive Strahlenbüschel, und zwar liegen die Strahlenbüschel e_1 und ε_1 perspektiv, weil e_1 und ε_1 gleichzeitig in p_1 fallen, nämlich dann, wenn der Strahl e durch P geht. Der Schnittpunkt E_1 von e_1 und ε_1 bewegt sich daher in einer Gerade f_1, und diese soll dem Punkte F zugeordnet werden.

Damit haben wir jeder Gerade e von σ einen Punkt E_1 von σ_1 und jedem Punkte F von σ eine Gerade f_1 von σ_1 zugewiesen und zwar derart, daſs jedem in e liegenden Punkte F eine durch E_1 gehende Gerade f_1 entspricht.

Da der Schnittpunkt $P = a\,\alpha$ und die Verbindungslinie $p_1 = A_1\,\mathsf{A}_1$, wie wir sahen, einander zugewiesen werden muſsten, so ist die projektive Beziehung der Punktreihe a und des Strahlenbüschels A_1 dadurch bestimmt, daſs wir zwei beliebigen Punkten $\mathsf{\Delta}$ und A von a zwei beliebige Strahlen δ_1 und α_1 von A_1 zuweisen; ebenso ist die projektive Beziehung von α und A_1 dadurch bestimmt, daſs wir zwei beliebigen Punkten B und $\mathsf{\Gamma}$ von α zwei beliebige Strahlen β_1 und γ_1 von A_1 zuweisen. Da nun mit den Punkten $\mathsf{\Delta\,A\,B\,\Gamma}$ die Geraden a und α und mit den Strahlen $\delta_1\,\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ die Punkte A_1 und A_1 gegeben sind, so sind die Stücke, die wir willkürlich annehmen können, die vier Punkte $\mathsf{\Delta\,A\,B\,\Gamma}$ und die vier Strahlen $\delta_1\,\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$. Daher:

2. *Die reziproke Verwandtschaft zweier ebenen Felder ist bestimmt, wenn den Ecken eines Vierecks von σ die Seiten eines Vierseits von σ_1 zugewiesen werden.*

181 181. **Kennzeichen des zweifachen Entsprechens.** Wir können auch die Punkte und Geraden einer und derselben Ebene σ reziprok aufeinander beziehen, indem wir den Ecken des Vierecks $\Delta\,\mathrm{A}\,\mathrm{B}\,\Gamma$ von σ die Seiten des Vierseits $\delta_1\,\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ von σ zuordnen. Wir wollen, da wir dann jeden Punkt als einen zweifachen und jede Gerade als eine zweifache anzusehen haben, jedes Element mit zwei Buchstaben bezeichnen, um anzudeuten, ob wir es zum ersten oder zweiten Felde rechnen wollen. Einem Punkte $A\,(B_1)$ z. B. entsprechen dann zwei Geraden a_1 und b, die im allgemeinen nicht zusammenfallen werden; es ist aber gerade dieser Fall für uns von Interesse, der Fall also, daſs dem Punkte $A\,(B_1)$ die Gerade $a_1\,(b)$ entspricht oder, wie wir uns ausdrücken wollen, daſs dem Punkte A die Gerade b *zweifach* entspricht (vgl. 38). Es läſst sich nun der Satz beweisen:

> *In zwei reziproken ebenen Feldern entsprechen je zwei zugeordnete Elemente einander zweifach, wenn die Ecken* eines *Dreiecks ihren Gegenseiten zweifach entsprechen.*

In dem Dreieck $P\,Q\,R$ (Fig. 111), dessen Ecken wir mit $P_1\,Q_1\,R_1$ bezeichnen wollen, wenn wir sie zum zweiten

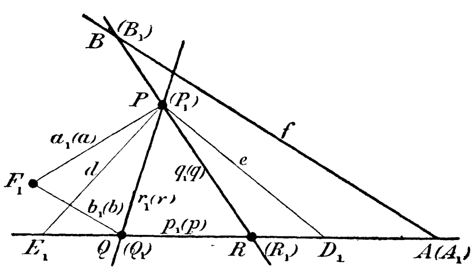

Fig. 111.

Felde rechnen, entspreche dem Punkte P die Gegenseite $Q\,R = p_1$, dem Punkte Q die Gegenseite $R\,P = q_1$, dem Punkte R die Gegenseite $P\,Q = r_1$. Nach der Voraussetzung entspricht dann dem Punkte P_1 (dem zum zweiten Felde gerechneten Punkte P) ebenfalls die Gerade p, die wir als Gerade des zweiten Feldes durch p_1 bezeichnet haben, d. h. die Gerade $p = Q_1\,R_1$; ebenso entsprechen den Ecken Q_1 und R_1 die Gegenseiten $q\,(q_1)$ und $r\,(r_1)$.

Die Punktreihe p_1 ist projektiv auf den Strahlenbüschel P bezogen[179₂] und zwar ist dem Punkte Q_1 von p_1 der Strahl q von P und dem Punkt R_1 von p_1 der Strahl r von P zugeordnet. Da nun q durch R_1 und r durch Q_1 geht, so sind die Punktreihe p_1 und der Strahlenbüschel P in involutorischer Lage[63₄]; aus denselben Gründen ist auch die Punktreihe p und der Strahlenbüschel P_1 in involutorischer Lage.

Ist nun D_1 irgend ein weiterer Punkt von p_1, dem im ersten Felde der durch P gehende Strahl d entspreche, so mufs dem Schnittpunkte $E_1 = d\,p_1$, weil die Punktreihe p_1 und der Strahlenbüschel P in involutorischer Lage sind, der Strahl $e = P D_1$ entsprechen. Nennen wir nun den Punkt D_1 als Punkt des ersten Feldes D, so mufs der ihm zugeordnete Strahl d_1, weil D in p und e liegt, die Verbindungslinie von P_1 und E_1 sein, d. h. d_1 fällt mit d zusammen. Damit ist gezeigt, dafs jeder Punkt von $p_1\,(p)$ seinem durch $P\,(P_1)$ gehenden zugeordneten Strahle zweifach entspricht. Da das, was wir von der Seite $Q\,R$ und der gegenüberliegenden Ecke P gezeigt haben, auch von den beiden andern Seiten und ihren Gegenecken gilt, so wissen wir:

Jedem Punkte, der in einer Seite des Dreiecks $P\,Q\,R$ liegt, entspricht der zugeordnete Strahl zweifach.

Jetzt können wir zeigen, dafs einer beliebigen Gerade $f\,(f_1)$ der zugeordnete Punkt zweifach entspricht. Schneidet $f\,(f_1)$ die Dreiecksseiten p und q in den Punkten $A\,(A_1)$ und $B\,(B_1)$, so entsprechen diesen Punkten die zugeordneten Geraden $a_1\,(a)$ und $b_1\,(b)$ zweifach. Weil nun die Gerade $f\,(f_1)$ durch $A\,(A_1)$ und $B\,(B_1)$ geht, so entspricht ihr nach der Definition der reziproken Verwandtschaft im zweiten Felde der Schnittpunkt F_1 der den Punkten A und B zugeordneten Geraden a_1 und b_1, im ersten Felde der Schnittpunkt der den Punkten A_1 und B_1 zugeordneten Geraden a und b. Dieser zweite Schnittpunkt fällt aber mit F_1 zusammen, weil $a\,a_1$ und $b\,b_1$ zusammenfallen.

182. **Involutorische Lage zweier homologen Grundgebilde.** Wenn in zwei reziproken Feldern, die in einer und derselben Ebene liegen, je zwei zugeordnete Elemente einander zweifach entsprechen, so sagt man: Die beiden reziproken Felder sind in *involutorischer Lage.* 182

Dieser Ausdruck erklärt sich aus dem folgenden: Wir haben bereits gesehen(181), dafs die Punkte von p_1 (p) und die zugeordneten Strahlen von $P(P_1)$ oder, wie wir von jetzt an schreiben wollen, die Punkte der Gerade p und die zugeordneten Strahlen von P in involutorischer Lage sind. Es sind aber auch die Punkte einer beliebigen Gerade e und die Strahlen des zugeordneten Punktes E in involutorischer Lage. Ist nämlich A ein beliebiger Punkt von e und a der ihm zugeordnete durch E gehende Strahl, der e in B schneidet, so mufs nach der Definition der reziproken Verwandtschaft dem Punkte B, weil er der Schnittpunkt von a und e ist, die Verbindungslinie von E und A entsprechen. Die Punktreihe A von e und der zugeordnete Strahlenbüschel a von E sind also in involutorischer Lage.

Lehrsatz: *In zwei reziproken Feldern, die in involutorischer Lage sind, liegt jede Punktreihe involutorisch zu dem homologen Strahlenbüschel.*

---

§ 16. Das Polarfeld.

183 183. **Das Polarfeld.** In zwei reziproken Feldern, die in involutorischer Lage sind, ist jedem Punkte E und jeder durch E gehenden Gerade f von σ eine Gerade e und ein in ihr liegender Punkt F derselben Ebene σ zugewiesen(182). Es liegt daher nahe, die beiden reziproken Felder als ein einziges Gebilde aufzufassen.

1. Definition: *Der Inbegriff zweier reziproken Felder in involutorischer Lage heifst ein Polarfeld zweiter Ordnung.*

Um für zwei zugeordnete Elemente kürzere Bezeichnungen zu haben, fügen wir die folgende Definition hinzu:

2. Jeder Punkt heifst der Pol der ihm zugeordneten Gerade. — Jede Gerade heifst die Polare des ihr zugeordneten Punktes.

Mit Hülfe dieser neuen Benennung läfst sich der Definition der reziproken Verwandtschaft die Form geben:

3. Die Polaren der Punkte einer Gerade gehen durch einen Punkt, den Pol der Gerade. — Oder:

4. Die Pole der Strahlen eines Punktes liegen in einer Gerade, der Polare des Punktes.

Der in Nr. 182 bewiesene Satz lautet jetzt:

5. Die von den Punkten einer Gerade gebildete Punktreihe und der von ihren Polaren gebildete Strahlenbüschel sind in involutorischer Lage. — Oder:

6. Der von den Strahlen eines Punktes gebildete Strahlenbüschel und die von ihren Polen gebildete Punktreihe sind in involutorischer Lage.

184. **Konjugierte Elemente.** Liegt Q in der Polare p 184
von P, so liegt P in der Polare q von $Q^{(183_3)}$. Wir können daher folgende Definitionen und Sätze aufstellen:

1. Zwei Punkte heifsen *konjugiert*, wenn der eine in der Polare des andern liegt.

2. Zwei Strahlen heifsen *konjugiert,* wenn der eine durch den Pol des andern geht.

3. Sind zwei Punkte einem dritten konjugiert, so ist ihre Verbindungslinie die Polare des dritten Punktes.

4. Sind zwei Geraden einer dritten konjugiert, so ist ihr Schnittpunkt der Pol der dritten Gerade.

Aus Nr. 183_5 folgt dann:

5. Je zwei konjugierte Punkte einer Gerade sind Punktpaare einer Involution. — Diese Involution heifst die dem Polarfelde *konjugierte Punktinvolution* der Gerade.

6. Je zwei konjugierte Strahlen eines Punktes sind Strahlenpaare einer Involution. — Diese Involution heifst die dem Polarfelde *konjugierte Strahleninvolution* des Punktes.

7. Die konjugierte Punktinvolution einer Gerade liegt perspektiv zu der konjugierten Strahleninvolution ihres Pols. —

Sind P und Q zwei konjugierte Punkte, so bilden, wenn wir den Pol der Verbindungslinie $PQ = r$, also$^{(183_3)}$ den Schnittpunkt der Polaren p und q, mit R bezeichnen, die drei Punkte PQR ein Dreieck, in dem jede Seite die Polare ihrer Gegenecke ist:

8. Ein Dreieck, in dem jede Seite die Polare ihrer Gegenecke (oder, was dasselbe sagt, jede Ecke der Pol ihrer Gegenseite) ist, heifst ein *Poldreieck.* —

9. Durch zwei konjugierte Punkte ist ein Poldreieck bestimmt.

Z *Zusatz.* Früher haben wir die Begriffe Pol und Polare (§ 7) und den Begriff der konjugierten Elemente (§ 8) vermittelst einer Kurve definiert; wir werden erkennen[(190)], daſs unsere jetzige Definition die frühere als besondern Fall enthält. An dieser Stelle läſst sich bereits zeigen, daſs die in Nr. 94—96 entwickelten Sätze auch für unsere jetzige Definition gelten. — Bewegt sich ein Punkt A in der Gerade p, so dreht sich seine Polare a um den Pol P von p[(183₅)] und schneidet jede Gerade in einer Punktreihe, die der von A beschriebenen projektiv ist. Zwei gerade Punktreihen sind also projektiv aufeinander bezogen, wenn man den Punkten der einen die ihnen konjugierten der andern zuweist. Da wir aus diesem Satze allein den Inhalt der Nrn. 94—96 entwickelt haben, so gilt dieser auch für die einem Polarfelde konjugierten Elemente.

185 185. **Das Poldreieck als Bestimmungsstück eines Polarfeldes.** Nach Nr. 180_2 erhalten wir zwei reziproke Felder, wenn wir den Ecken eines Vierecks die Seiten eines Vierseits zuweisen; sollen die beiden reziproken Felder involutorische Lage haben, so müssen nach Nr. 181 die Ecken *eines* Dreiecks ihren Gegenseiten zweifach entsprechen. Wir können deswegen zwei reziproke Felder in involutorischer Lage in folgender Weise konstruieren: Wir nehmen vier Punkte $P\,Q\,R\,U$ und eine Gerade u beliebig an und weisen, indem wir die Seiten des Dreiecks $P\,Q\,R$ mit $p\,q\,r$ bezeichnen, dem Viereck $P\,Q\,R\,U$ die Seiten des Vierseits $p\,q\,r\,u$ zu. Da bei dieser Zuweisung die Punkte $P\,Q\,R$ ein Poldreieck[(184₈)] bilden, so haben wir den

Lehrsatz: *Ein Polarfeld ist bestimmt durch einen Punkt, seine Polare und ein Poldreieck.*

186 186. **Bestimmung eines Polarfeldes durch zwei perspektiv liegende Dreiecke.**

Lehrsatz: *Ein Polarfeld ist bestimmt durch zwei perspektiv liegende Dreiecke, wenn die Seiten des einen den Ecken des andern als Polaren zugewiesen werden.*

Die Ecken des einen Dreiecks seien $U\,C\,\Gamma$ (Fig. 112) und die Seiten des zweiten $u\,c\,\gamma$. Bezeichnen wir die Punkte, in denen die Seiten $U\,C$, $C\,\Gamma$ und $\Gamma\,U$ von den Seiten γ, u und c geschnitten werden, durch Q, A und S, so liegen Q, A und S, weil die Dreiecke perspektiv liegen(15), in einer Gerade p. Bezeichnen wir ferner die Ecken des zweiten Dreiecks $u\,c\,\gamma$ durch $U_1 = c\,\gamma$, $H_1 = \gamma\,u$ und $G_1 = u\,c$, so gehen die Verbindungslinien $U\,U_1$, $C\,H_1$ und $\Gamma\,G_1$ durch einen Punkt P. Die Punkte $A_1\,S_1\,R$, in denen diese Verbindungslinien die Gerade p schneiden, bilden mit $A\,S\,Q$ die Involution $A\,A_1 \,.\, S\,S_1 \,.\, Q\,R$(64₁).

In dem Polarfelde nun, das durch das Poldreieck $P\,Q\,R$, den Punkt U und seine Polare u bestimmt(185) ist, sind, wie wir zeigen wollen, die Seiten des Dreiecks $U\,C\,\Gamma$ die Polaren der Ecken des Dreiecks $u\,c\,\gamma$. Weil nach der Zuweisung Q der Pol von $P\,R$ und U der Pol von u ist, so ist(183₄) $U\,C$ die Polare von G_1. Ferner ist der Punkt A als Schnittpunkt von $p\,u$ der Pol von $P\,U$ und daher dem Punkte A_1 konjugiert(184₁), sodafs

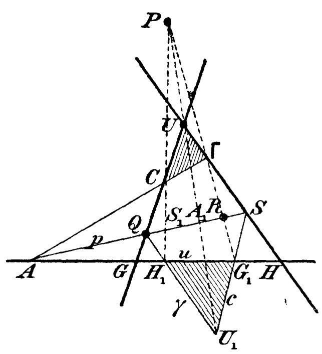

Fig. 112.

die konjugierte Involution von p bestimmt ist(63₅) durch den Wurf $Q\,R \,.\, A\,A_1$; da in dieser Involution dem Punkte S, wie wir eben sahen, der Punkt S_1 entspricht, so ist S der Pol von $P\,S_1$, die Seite $U\,\Gamma\,(S)$ also die Polare des Punktes H_1. Die Seiten des Dreiecks $U\,C\,\Gamma$ sind also in der That die Polaren der Ecken des von $u\,c\,\gamma$ gebildeten Dreiecks.

Zusatz. Und umgekehrt sind auch die Seiten $u\,c\,\gamma$ die z
Polaren der Ecken $U\,C\,\Gamma$(183₃).

187. Bestimmung eines Polarfeldes durch zwei konjugierte Involutionen und eine komponierende ihrer diagonalen Involution. 187

Lehrsatz: *Ein Polarfeld ist bestimmt durch zwei konjugierte Punktinvolutionen und irgend eine komponierende ihrer diagonalen Involution.*

Lehrsatz: *Ein Polarfeld ist bestimmt durch zwei konjugierte Strahleninvolutionen und irgend eine komponierende ihrer diagonalen Involution.*

In den Trägern g und h (Fig. 113), die sich in U schneiden, seien die beiden Involutionen $U\,G \,.\, C\,C_1$ und $U\,H \,.\, \Gamma\,\Gamma_1$ gegeben. In der Diagonale $G\,H = u$ bilden G

und H ein Punktpaar der diagonalen Involution[135_2] und ferner die beiden Punkte A und B, in denen u von $C\Gamma$ und $C_1\Gamma_1$ geschnitten wird. Wird nun irgend eine komponierende der diagonalen Involution durch die Zuweisung $(G\,G_1)$[166_1] bestimmt, so entspricht in dieser komponierenden dem Punkte H der Punkt H_1, der dem Punkte G_1 in der diagonalen Involution zugeordnet ist[166_4]. Schneiden die Verbindungslinien $C_1 G_1 = c$ und $\Gamma_1 H_1 = \gamma$ die Träger h und g in den Punkten S und Q, so bilden $S\,Q\,C_1\,\Gamma_1$ ein Viereck, von dem zwei Paar Gegenseiten die Diagonale u in den Punktpaaren $G\,H$ und $G_1\,H_1$ der diagonalen Involution treffen; es geht also[64 Z] $S\,Q$ durch A. Es sind daher[15] die beiden Dreiecke $U\,C\,\Gamma$ und $u\,c\,\gamma$ perspektiv liegend und bestimmen[186] ein Polarfeld. Dieses Polarfeld aber erzeugt, weil u und c die Polaren von U und C sind, in dem Träger g die konjugierte Involution $U\,G\,.\,C\,C_1$, und, weil u und γ die Polaren von U und Γ sind, in dem Träger h die konjugierte Involution $U\,H\,.\,\Gamma\,\Gamma_1$, und in u, weil G_1 als Schnittpunkt von c und u der Pol von g, und H_1 als Schnittpunkt von γ und u der Pol von h ist, die konjugierte Involution $G\,G_1\,.\,H\,H_1$.

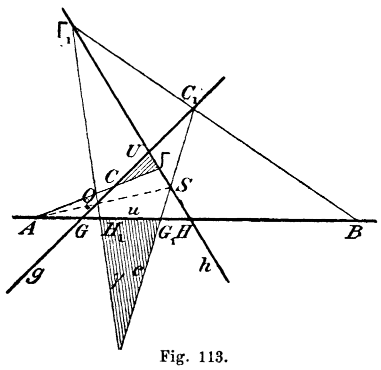

Fig. 113.

z *Zusatz.* Weil die komponierende Involution von u durch die Zuweisung der Punkte G und G_1 bestimmt wurde, so werden wir das Polarfeld, welches durch die konjugierten Involutionen g^2 und h^2 und die durch $(G\,G_1)$ bestimmte komponierende Involution von u bestimmt ist, in Zukunft oft kurz *das durch die Zuweisung* $(G\,G_1)$ *bestimmte Polarfeld* nennen. Den Inhalt unsers Beweises können wir dann kurz so zusammenfassen:

> *In dem durch* $(G\,G_1)$ *bestimmten Polarfeld ist* G_1 *der Pol von* g *und der dem Punkte* G_1 *in der diagonalen Involution homologe Punkt* H_1 *der Pol von* h.

188. Bestimmung eines Polarfeldes durch zwei konjugierte Involutionen und einen Ordnungspunkt. 188
Für ein Polarfeld haben, wie wir sehen werden, die Punkte eine grofse Wichtigkeit, die in ihrer Polare liegen; wir führen deshalb für sie einen neuen Namen ein durch die

1. Definition: *Ein Punkt, der in seiner Polare liegt, heifst ein Ordnungspunkt des Polarfeldes.*

1. Definition: *Eine Gerade, die durch ihren Pol geht, heifst ein Ordnungsstrahl des Polarfeldes.*

Sind uns nun zwei Punktinvolutionen g^2 und h^2 und ein Punkt E gegeben, so läfst sich immer ein Polarfeld konstruieren, dem die Involutionen g^2 und h^2 konjugiert sind und für welches die Polare von E durch E geht, mit andern Worten, es läfst sich der Satz beweisen:

2. *Durch zwei konjugierte Punktinvolutionen* g^2 *und* h^2 *und einen Ordnungspunkt* E *ist ein Polarfeld bestimmt.*

2. *Durch zwei konjugierte Strahleninvolutionen* G^2 *und* H^2 *und einen Ordnungsstrahl* e *ist ein Polarfeld bestimmt.*

Wir betrachten die Hauptstrahleninvolution[(170)], welche die Involutionen g^2 und h^2 in E induzieren. Schneidet der Strahl von E, welcher dem Strahle $E(U)$ in der Hauptinvolution E^2 homolog ist, die Träger g und h in C und Γ (Fig. 114), so schneiden[(170 Z_2)] die Strahlen $E(C_1)$ und $E(\Gamma_1)$, die den Strahlen $E(G)$ und $E(H)$ in der Hauptinvolution homolog sind, die Diagonale in zwei homologen Punkten G_1 und H_1 der diagonalen Involution. Wählen wir also das Polarfeld, welches durch die Zuweisung $(G\,G_1)$ bestimmt[(187 Z)] ist, so ist für dieses H_1 der Pol von h. Es ist daher C der Pol von $C_1\,G_1$[(184_3)] und Γ der Pol von $\Gamma_1\,H_1$, $C\,\Gamma$ also[(184_4)] die Polare des Schnittpunktes E von $C_1\,G_1$ und $\Gamma_1\,H_1$. Für das Polarfeld $(G\,G_1)$ geht also in der That die Polare von E durch E. — Die Konstruktion fassen wir noch einmal zusammen:

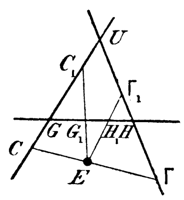

Fig. 114.

3. Die Gegenseiten g^2 und h^2 induzieren in jedem Punkte E eine Hauptstrahleninvolution E^2[(170)]. Schneidet der Strahl, welcher in E^2 dem

3. Die Gegenecken G^2 und H^2 induzieren in jeder Gerade eine Hauptpunktinvolution e^2. Wird der Punkt, welcher in e^2 dem Schnitt-

Strahle $E(G)$ homolog ist, die Diagonale u im Punkte G_1, so erhalten wir durch die Zuweisung $(G\,G_1)$ ein Polarfeld, für welches E ein Ordnungspunkt ist.

punkte $e(g)$ homolog ist, aus dem Diagonalpunkte U durch den Strahl g_1 projiziert, so erhalten wir durch die Zuweisung $(g\,g_1)$ ein Polarfeld, für welches e ein Ordnungsstrahl ist.

Ferner ergiebt sich durch die Konstruktion:

Für das durch g^2 *und* h^2 *und* E *bestimmte Polarfeld*

4. *ist der dem Strahle* $\mathrm{E(U)}$ *in* E^2 *homologe Strahl* $\mathrm{E(C)}$ *die Polare von* E;

5. *schneidet der dem Strahle* $\mathrm{E(G)}$ *homologe Strahl* $\mathrm{E(C_1)}$ *die Diagonale* u *in dem Pole* $\mathrm{G_1}$ *von* g *und der dem Strahle* $\mathrm{E(H)}$ *homologe Strahl* $\mathrm{E(\Gamma_1)}$ *die Diagonale* u *in dem Pole* $\mathrm{H_1}$ *von* h;

mit andern Worten:

6. *liegt die Hauptstrahleninvolution* E^2 *perspektiv zu der konjugierten Punktinvolution* $\mathrm{G\,G_1\,.\,H\,H_1}$ *von* u.

Für das durch G^2 *und* H^2 *und* e *bestimmte Polarfeld*

4. *ist der dem Punkte* $\mathrm{e(u)}$ *in* e^2 *homologe Punkt* $\mathrm{e(c)}$ *der Pol von* e;

5. *wird der dem Punkte* $\mathrm{e(g)}$ *homologe Punkt* $\mathrm{e(c_1)}$ *aus dem Diagonalpunkte* U *durch die Polare* $\mathrm{g_1}$ *von* G *projiziert und der dem Punkte* $\mathrm{e(h)}$ *homologe Punkt* $\mathrm{e(\gamma_1)}$ *aus dem Diagonalpunkte* U *durch die Polare* $\mathrm{h_1}$ *von* H;

mit andern Worten:

6. *liegt die Hauptpunktinvolution* e^2 *perspektiv zu der konjugierten Strahleninvolution* $\mathrm{g\,g_1\,.\,h\,h_1}$ *von* U.

189 189. **Ordnungskurve.** Für ein Polarfeld, welches durch die konjugierten Involutionen g^2 und h^2 und den Ordnungspunkt S (wie wir jetzt statt E schreiben wollen) bestimmt(188₂) ist, ist der Punkt S, weil er in seiner Polare liegt, sich selbst konjugiert und daher ein Ordnungspunkt in der konjugierten Involution jedes durch ihn gehenden Strahles. Es giebt daher in jedem durch S gehenden Strahl noch einen zweiten Ordnungspunkt(63₆). Es läfst sich zeigen, dafs alle diese Ordnungspunkte in einer Kurve zweiter Ordnung liegen. — Da der zweite Ordnungspunkt irgend eines durch S gehenden Strahles der von S durch zwei konjugierte Punkte harmonisch getrennte Punkt ist(63₈), so ist z. B., weil der Punkt G_1 und der Punkt C_1 (Fig. 115)

seiner Polare(188₅) zwei konjugierte Punkte sind, der von S durch G_1 und C_1 harmonisch getrennte Punkt L ein Ordnungspunkt; ebenso ist der von S durch H_1 und den konjugierten Punkt Γ_1 harmonisch getrennte Punkt M ein Ordnungspunkt.

Der Ordnungspunkt eines beliebigen durch S gehenden Strahles läfst sich nun vermittelst der Punkte S und L in folgender Weise finden. Schneidet dieser Strahl den Träger g in E, so ist die Polare von E die Gerade, welche den homologen Punkt E_1 von g^2 mit dem Pole G_1 von g ver-

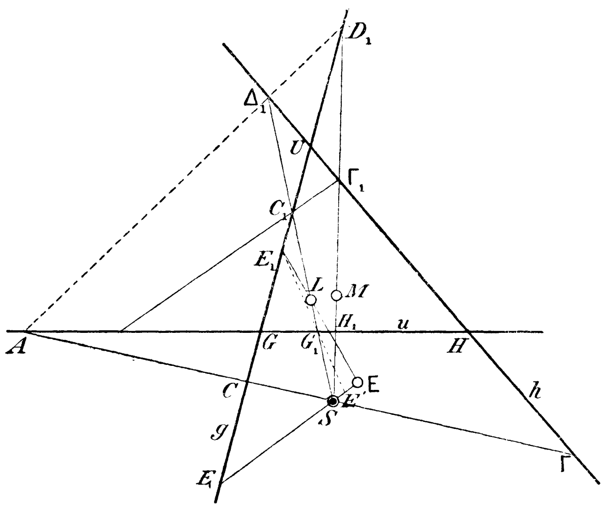

Fig. 115.

bindet; der Punkt E', in dem diese Gerade den Strahl SE schneidet, ist dem Punkte E konjugiert(184₁), und daher ist der von S durch E und E' harmonisch getrennte Punkt E der zweite Ordnungspunkt des Strahles $S(E)$. Nun sind die beiden harmonischen Würfe $SL.G_1C_1$ und $S\mathsf{E}.E'E$ in perspektiver Lage; es geht daher(40₁) $L\mathsf{E}$ durch den Schnittpunkt von G_1E' und C_1E, das ist durch den Punkt E_1. Der Ordnungspunkt E stellt sich also dar als Schnittpunkt zweier Strahlen von S und L, die die homologen Punkte E und E_1 von g^2 projizieren. Die Ordnungspunkte E liegen daher in einer Kurve zweiter Ordnung(98₁).

Lehrsatz: *Hat ein Polarfeld* einen *Ordnungspunkt, so hat es unendlich viele. Die Ordnungspunkte eines solchen Polarfeldes bilden eine krumme Punktreihe. Diese krumme Punktreihe heißt die Ordnungskurve des Polarfeldes.*

Lehrsatz: *Hat ein Polarfeld* einen *Ordnungsstrahl, so hat es unendlich viele. Die Ordnungsstrahlen eines solchen Polarfeldes bilden einen krummen Strahlenbüschel. Dieser krumme Strahlenbüschel heißt der Ordnungsbüschel des Polarfeldes.*

190 190. **Identische Polarfelder.** Wir wollen jetzt das Polarfeld zeichnen, das durch die eben konstruierte Kurve bestimmt ist. Da die Kurve erzeugt wurde durch Projektion der Involution g^2 aus den beiden mit G_1 in einer Gerade liegenden Punkten S und L, so ist g^2 auch für die Kurve eine konjugierte Involution und G_1 der Pol von g(98₁). Es läßt sich weiter zeigen, daß auch h^2 eine dieser Kurve konjugierte Involution ist. Zunächst folgt, daß $G\,G_1$ die Polare von U(92₂) und daher U und H zwei für die Kurve konjugierte Punkte sind. Da dem Strahle $L(S)\,C_1$ der Strahl $S(C)$ zugeordnet ist, so ist $S(C)$ die Tangente in S(45). Für die Kurve ist also auch S der Pol von $C\,\Gamma$(87 Z₂). Ferner sind, weil, wie wir sahen, der von S durch H_1 und Γ_1 harmonisch getrennte Punkt M ein Punkt der Kurve ist, Γ_1 und H_1 zwei für die Kurve konjugierte Punkte(86₂), der Punkt H_1 also, weil er auch U konjugiert ist, der Pol von $U\,\Gamma_1 = h$. Die Polare von Γ geht daher durch H_1 und da sie auch, weil Γ ein Punkt der Tangente von S ist, durch S geht, so ist für die Kurve Γ dem Punkte Γ_1 konjugiert. Der Ordnungskurve sind also die Involutionen g^2 und h^2 konjugiert und der Punkt G_1 ist G konjugiert. Das durch die Kurve erzeugte Polarfeld ist daher identisch(187) mit dem Polarfelde, von dem wir ausgingen.

Hat ein Polarfeld eine Ordnungskurve, so ist es identisch mit dem von dieser Ordnungskurve erzeugten Polarfeld. Die Ordnungsstrahlen des Polarfeldes umhüllen daher die Ordnungskurve.

A *Anmerkung.* In § 7 haben wir vermittelst einer Kurve zweiter Ordnung zu jedem Punkte der Ebene die Polare und zu jeder Gerade den Pol zeichnen gelernt. Jetzt haben wir ein Polarfeld, ohne den Begriff der Kurve zu benutzen, konstruiert und haben vermittelst des so konstruierten Polarfeldes die Kurve als Ort der Ordnungspunkte des Polarfeldes definieren können. Wir hätten also auch mit dem Polarfeld beginnen und aus seinen Eigenschaften die Eigenschaften der Kurve entwickeln können. Das hat thatsächlich v. Staudt gethan und damit die wissenschaftlich richtigere Darstellung gegeben. In einem Buche aber, das für den Lernenden geschrieben ist, mufs der anschaulichere Weg, und das ist der von der Kurve ausgehende, dem weniger anschaulichen, dem vom Polarfeld ausgehenden, vorangestellt werden. Nachdem wir nunmehr beide Wege kennen gelernt haben, können wir von jetzt an unsern Betrachtungen den allgemeinern Begriff des Polarfeldes zu Grunde legen. Die Sätze, die wir so erhalten, gelten dann für alle Polarfelder, und wir haben nicht nötig, bei unsern Beweisen die Fälle, in denen eine Ordnungskurve vorhanden ist, zu trennen von den Fällen, in denen eine Ordnungskurve nicht vorhanden ist oder, wie man sonst sagt, in denen die Ordnungskurve imaginär ist.

191. **Konstruktion der zweiten gemeinsam konjugierten Involution.** 191

1. Aufgabe: *Von zwei Polarfeldern, die eine konjugierte Punktinvolution gemeinsam haben, die zweite gemeinsam konjugierte Punktinvolution zu zeichnen.*	1. Aufgabe: *Von zwei Polarfeldern, die eine konjugierte Strahleninvolution gemeinsam haben, die zweite gemeinsam konjugierte Strahleninvolution zu zeichnen.*

Konstruktion: Die den beiden Polarfeldern k_1^2 und k_2^2 gemeinsam konjugierte Punktinvolution sei g^2, ferner sei G_1 (Fig. 116) der Pol von g für k_1^2 und G_2 der Pol von g für k_2^2. Die Gerade $G_1 G_2 = u$ schneide g in dem Punkte G, dem in der gemeinsam konjugierten Involution g^2 der Punkt U homolog sei. Wenn dann dem Punkte G_1 für das zweite Polarfeld k_2^2 der Punkt G_{12} von u und dem Punkte G_2 für k_1^2 der Punkt G_{21} von u konjugiert ist, so ist der Träger der zweiten gemeinsam konjugierten Involution der Strahl h von U, welcher von G durch G_{12} und G_{21} harmonisch getrennt ist.

Beweis: Da dem Punkte U für k_1^2 die Punkte G_1 und G, für k_2^2 die Punkte G_2 und G konjugiert sind, so ist

$G_1\,G = G_2\,G = u$ die Polare des Punktes U sowohl für $k_1{}^2$ wie für $k_2{}^2$ [(184$_2$)]. Da dem Punkte G_1 für $k_2{}^2$ der Punkt G_{12} konjugiert ist, so ist G_1 für $k_2{}^2$ der Pol von $G_{12}\,U$; ebenso ist G_2 für $k_1{}^2$ der Pol von $G_{21}\,U$.

Sind nun C und C_1 irgend zwei homologe Punkte von g^2, so ist C_1 für $k_1{}^2$ der Pol von $C\,G_1$ und C für $k_2{}^2$ der Pol von $C_1\,G_2$. Der Punkt P, in dem $C\,G_1$ von $G_{21}\,U$ geschnitten wird, ist also für $k_1{}^2$ der Pol von $C_1\,G_2$ und der Punkt P_1, in dem $C_1\,G_2$ von $G_{12}\,U$ geschnitten wird, ist für $k_2{}^2$ der Pol von $C\,G_1$. Die Punkte P und P_1, von denen P_1 in der Polare von P für $k_1{}^2$ und P in der Polare von P_1 für $k_2{}^2$ liegt, sind demnach für beide Polarfelder einander konjugiert. Da auch die Punkte U und

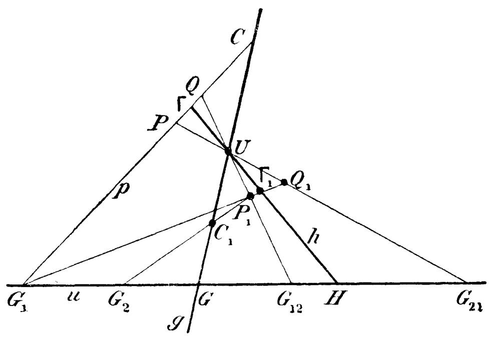

Fig. 116.

G_1 einander für beide Polarfelder konjugiert sind, so bestimmen die beiden Punktpaare $P\,P_1$ und $U\,G_1$ noch ein drittes Paar konjugierter Punkte (96; siehe 184 Z). Die Verbindungslinie $P\,G_1$ wird von der Verbindungslinie $P_1\,U$ in einem Punkte Q geschnitten, der für beide Polarfelder konjugiert ist dem Punkte Q_1, in dem $P\,U$ von $P_1\,G_1$ geschnitten wird. Den Punkten $C\,P\,Q\,G_1$, die in einer Gerade p liegen, sind also für die beiden Polarfelder die Punkte $C_1\,P_1\,Q_1\,U$ konjugiert.

Diese Punkte nun, die den Punkten einer Gerade p für beide Polarfelder konjugiert sind, können wir noch auf einem zweiten Wege konstruiert denken, indem wir zu jedem Punkte X von p die Polaren x_1 und x_2 für $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ zeichnen und ihren Schnittpunkt X_1 bestimmen. Durchläuft X die Gerade p, so beschreibt sowohl x_1 wie x_2 einen zu X projektiven Strahlenbüschel$^{(183_5)}$; die Punkte X_1 liegen daher in einer zu p projektiven Kurve zweiter Ordnung. Bezeichnen wir also noch den Schnittpunkt von p und h durch Γ und den (noch unbekannten) ihm für beide Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ konjugierten durch Γ_1, so wissen wir, daſs die Punkte $P_1\,Q_1\,C_1\,\Gamma_1\,U$ in einer zu $P\,Q\,C\,\Gamma\,G_1$ projektiven Kurve liegen; es ist daher

$$U\,(P\,Q\,C\,\Gamma) \;\overline{\wedge}\; U\,(P_1\,Q_1\,C_1\,\Gamma_1).$$

Weil aber $P\,Q\,.\,C\,\Gamma$ nach der Konstruktion vier harmonische Punkte sind, so ist$^{(40_2)}$

$$U\,(P\,Q\,C\,\Gamma) \;\overline{\wedge}\; U\,(Q\,P\,C\,\Gamma),$$

also$^{(30_3)}$

$$U\,(Q\,P\,C\,\Gamma) \;\overline{\wedge}\; U\,(P_1\,Q_1\,C_1\,\Gamma_1).$$

Da die Strahlen $U\,Q$ und $U\,P_1$, $U\,P$ und $U\,Q_1$, $U\,C$ und $U\,C_1$ zusammenfallen, so müssen auch $U\,\Gamma$ und $U\,\Gamma_1$ zusammenfallen$^{(33_1)}$, d. h. Γ_1 ist ein Punkt von h und *beiden* Polarfeldern ist in h die Involution $U\,H\,.\,\Gamma\,\Gamma_1$ konjugiert. —

Wenn zwei Kurven einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie noch einen zweiten Punkt gemeinsam$^{(111)}$. Diese beiden gemeinsamen Punkte bestimmen als Ordnungspunkte$^{(92_7)}$ in ihrer Verbindungslinie eine beiden Kurven gemeinsam konjugierte Involution; die beiden Kurven haben daher nach unserm Satze noch eine zweite konjugierte Punktinvolution gemeinsam:

2. Haben zwei Kurven einen Punkt gemeinsam, so haben sie noch einen zweiten Punkt und eine konjugierte Punktinvolution gemeinsam.

2. Haben zwei Kurven eine Tangente gemeinsam, so haben sie noch eine zweite Tangente und eine konjugierte Strahleninvolution gemeinsam.

*Zusatz.** Da jedem Kreise die zirkulare Punktinvolution z konjugiert ist$^{(131_3)}$, so haben zwei Kreise nach unserm Satze noch eine konjugierte Punktinvolution gemeinsam. Diese zweite gemeinsame Punktinvolution zweier Kreise, deren Träger in der Planimetrie Chordale genannt wird, finden wir nach der oben gegebenen Konstruktion auf folgende Weise:

Die den beiden Kreisen gemeinsam konjugierte Involution ist die zirkulare o^2; O_1 und O_2 seien die beiden Pole von o,

d. i.$^{(114_2)}$ die Mittelpunkte der beiden Kreise. Schneidet die Zentrale $O_1 O_2 = u$ die uneigentliche Gerade o in O, so erhalten wir den dem Punkt O in der zirkularen Involution o^2 homologen Punkt U, indem wir in O_1 (oder O_2) auf der Zentrale das Lot errichten$^{(112_4)}$. Ist nun dem Mittelpunkt O_1 des ersten Kreises für den zweiten Kreis der Punkt O_{12} und dem Mittelpunkt O_2 des zweiten Kreises für den ersten Kreis der Punkt O_{21} konjugiert, so ist$^{(191)}$ das in der Mitte$^{(27_2)}$ von $O_{12}\, O_{21}$ errichtete Lot die Chordale der beiden Kreise (vgl. 139).

---

§ 17. Büschel und Schar von Polarfeldern.

192 192. **Büschel von Polarfeldern.** Wenn wir unter Beibehaltung unserer bisherigen Bezeichnungsweise den Punkt, der dem Schnittpunkte U der Träger g und h in g^2 entspricht, durch G und den dem Punkte U in h^2 homologen Punkt durch H bezeichnen, so ist $GH = u$ die Polare$^{(184_3)}$ des Punktes U für jedes Polarfeld, dem die Involutionen g^2 und h^2 konjugiert sind. Der Pol von g, den wir durch G_1 bezeichnen wollen, mufs daher$^{(183_4)}$ in u liegen. Sind C und C_1 zwei weitere homologe Punkte von g^2, so ist $C_1\, G_1$ die Polare von C und der Punkt Γ_1, in dem $C_1\, G_1$ den Träger h schneidet, der Pol der Verbindungslinie von C und Γ; $C\Gamma$ schneidet daher die Diagonale u in dem Pole H_1 von h. Es ist also $G\,G_1 \,.\, HH_1$ die dem Polarfeld konjugierte$^{(184_5)}$ Involution der Diagonale u. Da sie eine komponierende$^{(167_1)}$ der diagonalen$^{(135_2)}$ Involution $GH \,.\, G_1\, H_1$ ist, so können wir die unserm Polarfeld in der Diagonale konjugierte Involution als bestimmt ansehen durch die beiden Bedingungen$^{(166_1)}$, dafs sie eine komponierende der diagonalen Involution ist und dafs in ihr dem Punkte G der Punkt G_1 homolog ist. Jedes Polarfeld, dem die Involutionen g^2 und h^2 konjugiert sind, läfst sich also als durch die Zuweisung $(G\,G_1)$ bestimmt$^{(187)}$ ansehen. Wir erhalten daher *sämtliche* Polarfelder, denen g^2 und h^2 konjugiert sind, wenn wir den Punkt G_1 die Diagonale u durchlaufen lassen und für jede Lage von G_1 das durch die Zuweisung $(G\,G_1)$ bestimmte Polarfeld zeichnen.

Führen wir für die Gesamtheit der betrachteten Polarfelder einen neuen Namen ein durch die

1. Definition: *Der Inbegriff der Polarfelder, denen zwei gegebene Punktinvolutionen* g^2 *und* h^2 *konjugiert sind, heifst ein Büschel von Polarfeldern,*

1. Definition: *Der Inbegriff der Polarfelder, denen zwei gegebene Strahleninvolutionen* G^2 *und* H^2 *konjugiert sind, heifst eine Schar von Polarfeldern,*

so können wir das Gesagte so zusammenfassen:

2. Für sämtliche Polarfelder des Büschels ist U der Pol der Diagonallinie u.

2. Für sämtliche Polarfelder der Schar ist u die Polare des Diagonalpunktes U.

3. *Wir erhalten sämtliche Polarfelder des Büschels* (g h), *wenn wir den Punkt* G_1 *die Diagonale* u *durchlaufen lassen und für jede Lage von* G_1 *das durch die Zuweisung* ($G\,G_1$) *bestimmte*(187 Z) *Polarfeld zeichnen.*

3. *Wir erhalten sämtliche Polarfelder der Schar* (G H), *wenn wir den Strahl* g_1 *um den Diagonalpunkt* U *sich drehen lassen und für jede Lage von* g_1 *das durch die Zuweisung* ($g\,g_1$) *bestimmte Polarfeld zeichnen.*

Um die im folgenden benutzten Sätze im Zusammenhang aufzuführen, wiederholen wir an dieser Stelle den Inhalt von Nr. 187 Z. — In einer komponierenden der diagonalen Involution, in welcher dem Punkte G der Punkt G_1 homolog ist, entspricht dem Punkte H der Punkt H_1, welcher dem Punkte G_1 in der diagonalen Involution u^2 homolog ist(166₄); der Punkt H_1 ist daher der Pol(184₃) von $UH = h$ für das durch die Zuweisung $(G\,G_1)$ bestimmte Polarfeld.

4. *Für das Polarfeld* ($G\,G_1$) *ist* G_1 *der Pol von* g *und der dem Punkte* G_1 *in der diagonalen Punktinvolution homologe Punkt* H_1 *der Pol von* h.

4. *Für das Polarfeld* ($g\,g_1$) *ist* g_1 *die Polare von* G *und der dem Strahl* g_1 *in der diagonalen Strahleninvolution homologe Strahl* h_1 *die Polare von* H.

5. *Für das Polarfeld* ($G\,G_1$) *ist* $G\,G_1 . H\,H_1$ *die konjugierte Punktinvolution der Diagonallinie.*

5. *Für das Polarfeld* ($g\,g_1$) *ist* $g\,g_1 . h\,h_1$ *die konjugierte Strahleninvolution des Diagonalpunktes.*

Unter den Polarfeldern des Büschels heben wir dasjenige hervor, welches wir durch die Zuweisung $(G\,G)$ erhalten, für welches also G_1 in G fällt. Da der Punkt G_1 in seine Polare g fällt, so ist er ein Ordnungspunkt(188₁) des Polarfeldes. Es ist aber auch jeder Punkt C von g ein

Ordnungspunkt, denn er liegt ebenfalls in seiner Polare $C_1 G_1$. Da H_1 in H fällt, wenn G_1 in G fällt[166_5], so ist auch jeder Punkt von h ein Ordnungspunkt. Daher:

6. Zu den Ordnungskurven eines Büschels von Polarfeldern gehört das von den beiden Gegenseiten gebildete Geradenpaar.

6. Zu den Ordnungskurven einer Schar von Polarfeldern gehört das von den beiden Gegenecken gebildete Punktpaar.

z *Zusatz.* Haben die Involutionen g^2 und h^2 die Ordnungspunkte $K K_1$ und $L L_1$, so hat jedes Polarfeld eine Ordnungskurve[189]. Diese Ordnungskurven des Büschels gehen durch die vier Punkte $K K_1 L L_1$, so dafs in diesem Falle unser Büschel von Polarfeldern identisch ist mit dem in Nr. 102_1 definierten Kurvenbüschel.

Betrachten wir die vier Ordnungspunkte $K K_1 L L_1$, die man *Grundpunkte* des Büschels nennt, als Ecken eines Vierecks und bezeichnen die Gegenseiten $K L$ und $K_1 L_1$ durch g_1 und h_1, die Gegenseiten $K L_1$ und $K_1 L$ durch g_2 und h_2, so sind die Diagonalpunkte V und W, in denen sich die Gegenseiten $g_1 h_1$ und $g_2 h_2$ schneiden, die Ordnungspunkte der diagonalen Involution u^2[133 A]. Bezeichnen wir die hyperbolischen Involutionen, welche je zwei Ecken des Vierecks $K K_1 L L_1$ als Ordnungspunkte in ihrer Verbindungslinie bestimmen, durch $g_1{}^2$ u. s. w., so ist den Gegenseiten $g_1{}^2 h_1{}^2$ die diagonale Involution v^2 mit den Ordnungspunkten W und U, und den Gegenseiten $g_2{}^2 h_2{}^2$ die diagonale Involution w^2 mit den Ordnungspunkten U und V zugeordnet, mit andern Worten:

> Was von den Gegenseiten $g^2 h^2$ und ihrer diagonalen Involution u^2 gilt, gilt auch von $g_1{}^2 h_1{}^2$ und v^2, und von $g_2{}^2 h_2{}^2$ und w^2.

193 193. **Konstruktion eines Polarfeldes.** Da die Strahleninvolution des Poles perspektiv liegt zu der Punktinvolution der Polare[184_7], so ist mit der konjugierten Punktinvolution von g auch die konjugierte Strahleninvolution des Poles G_1 gegeben. Sind also C und C_1 irgend zwei konjugierte Punkte des Trägers g, so sind die Strahlen c_1 und c, welche C und C_1 aus G_1 projizieren, zwei homologe Strahlen der konjugierten Involution von G_1; C ist folglich[184_4] der Pol von c und C_1 der Pol von c_1. Da der dem Punkte G_1 in der

diagonalen Involution homologe Punkt H_1 der Pol von h ist$^{(192_4)}$, so ergiebt sich, wenn wir zwei konjugierte Punkte von h durch Γ und Γ_1 und die Strahlen, die sie aus H_1 projizieren, durch γ_1 und γ bezeichnen, dafs Γ der Pol von γ und Γ_1 der Pol von γ_1 ist. Vermittelst der konjugierten Punktinvolutionen g^2 und h^2 und der konjugierten Strahleninvolutionen $G_1{}^2$ und $H_1{}^2$ läfst sich nun zu jedem Punkte der Ebene die Polare und zu jeder Gerade der Pol in folgender Weise angeben (Fig. 117):

1. Ist E ein beliebiger Punkt der Ebene, der aus G_1 und H_1 durch c und γ projiziert wird, so ist die Verbindungslinie e der Pole C und Γ die Polare von E;

2. Ist e eine beliebige Gerade der Ebene, die g und h in C und Γ schneidet, so ist der Schnittpunkt E der Polaren c und γ der Pol von e.

Dafs wir durch diese Zuweisung ein Polarfeld erhalten, ist zwar durch das Vorhergehende bereits bewiesen; wir geben aber noch einen direkten Beweis, weil dieser die Grundlage für die folgenden Betrachtungen bildet. Wir haben also zunächst zu zeigen$^{(179_1)}$: Wenn E sich in einer Gerade f bewegt, so beschreibt die zugeordnete Gerade e einen geraden Strahlenbüschel F.

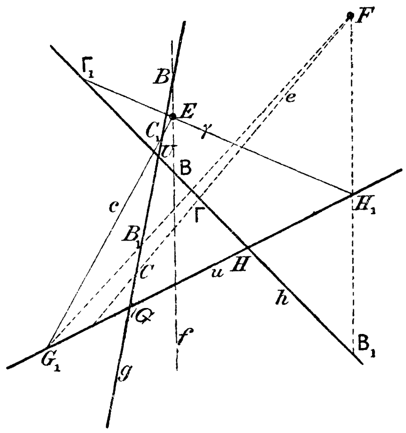

Fig. 117.

Bewegt sich der Punkt E in f, so beschreiben c und γ die zu f perspektiven Strahlenbüschel G_1 und H_1, die g und h in den projektiven Punktreihen C_1 und Γ_1 schneiden. Es bilden daher auch C und Γ zwei projektive$^{(63_7)}$ Punktreihen in g und h, und weil diese in perspektiver Lage sind, gehen die Verbindungslinien $C\Gamma$ durch $F^{(34)}$. Am besten läfst sich die Bewegung der einzelnen Elemente aus dem folgenden Schema ersehen$^{(37\,A)}$:

$$C^{(63_7)} \overline{\wedge}\, C_1\, [G_1] \overline{\overline{\wedge}}\, E\, [H_1] \overline{\overline{\wedge}}\, \Gamma_1{}^{(63_7)} \overline{\wedge}\, \Gamma.$$

Fällt der Punkt E in den Schnittpunkt von f und u, so fällt 1. C_1 in G und C daher in U, 2. Γ_1 in H und Γ daher ebenfalls in U. Die beiden projektiven Punktreihen C und Γ, die wir in g und h erhalten, sind daher in perspektiver Lage; die Verbindungslinie $C\Gamma = e$ beschreibt also einen zur Punktreihe E projektiven geraden Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt wir F nennen. — Schneidet die Gerade f die Träger g und h in B und B, so gehen, wie wir eben bewiesen haben, die den Punkten B und B zugeordneten Geraden $G_1 B_1$ und $H_1 \mathsf{B}_1$ durch F; zeichnen wir also umgekehrt wieder zu F die zugeordnete Gerade, so erhalten wir f. Je zwei zugeordnete Elemente entsprechen einander mithin zweifach, d. h. die beiden reziproken Felder sind in involutorischer Lage und bilden ein Polarfeld$[183_1]$.

Z *Zusatz.* Die eben benutzten Strahleninvolutionen $G_1{}^2$ und $H_1{}^2$, die perspektiv zu g^2 und h^2 liegen, erzeugen als Gegenecken[133] eine diagonale Involution, deren Mittelpunkt U ist, weil dem Strahle $G_1(G)$ der Strahl $G_1(U)$ und dem Strahle $H_1(H)$ der Strahl $H_1(U)$ homolog ist. Von der diagonalen Involution U^2 sind $U(G_1) = g_1$ und $U(H_1) = h_1$ zwei homologe Strahlen[133]. Ferner sind auch g und h zwei homologe Strahlen. Schneiden sich nämlich irgend zwei Strahlen c und γ von G_1 und H_1 in einem Punkte C_1 von g, so liegen, wenn wir den Schnittpunkt von γ und h durch Γ_1 bezeichnen, die homologen Punkte C und Γ in einem Strahle c_1 von G_1; c_1 und γ_1 schneiden sich also in Γ, das ist in einem Punkte von h. Die diagonale Strahleninvolution U^2 der Gegenecken $G_1{}^2$ und $H_1{}^2$ liegt mithin perspektiv zu der diagonalen Punktinvolution u^2 der Gegenseiten g^2 und h^2.

194 194. **Die dem Büschel adjungierten Involutionen.** Schneidet die beliebige Gerade e die Träger $g\,h\,u$ in $C\,\Gamma\,A$ (Fig. 118), so liegen die homologen Punkte $C_1\,\Gamma_1\,B$ ebenfalls in einer Gerade[133], und die Hauptinvolution in e ist, wenn wir den Schnittpunkt von $C\Gamma$ und $C_1\Gamma_1$ durch A bezeichnen, bestimmt durch den Wurf $C\Gamma\,.\,A\,\mathsf{A}$$[135_3]$. Die diagonale Involution ist bestimmt durch $G\,H\,.\,A\,B$$[135_2]$, und weitere homologe Punkte $G_1\,H_1$ dieser diagonalen Involution ergeben sich[136], wenn wir irgend zwei Punkte D und Δ von g und h, die mit A in einer Gerade liegen, aus C_1 und Γ_1 auf die Diagonale u projizieren. Für das Polarfeld $(G\,G_1)$ nun ist die Verbindungslinie $C_1\,G_1$ die Polare von C; sie

schneidet daher die Gerade e in dem dem Punkte C konjugierten Punkte C'(184₁). Ferner ist die Verbindungslinie $\Gamma_1 H_1$(192₄) die Polare von Γ, sie schneidet daher e in dem dem Punkte Γ konjugierten Punkte Γ'. Die dem Polarfelde $(G\,G_1)$ konjugierte Involution der Gerade e ist daher $C\,C'\,.\,\Gamma\,\Gamma'$. Dies ist eine komponierende von $C\,\Gamma\,.\,C'\,\Gamma'$(167₁); C' und Γ' aber bilden, wie das Viereck $C_1\,\Gamma_1\,D\,\Delta$ zeigt, ein Punktpaar der Hauptinvolution $C\,\Gamma\,.\,A\,\mathsf{A}$, so dafs die dem beliebigen Polarfelde $(G\,G_1)$ konjugierte Involution der Gerade e eine komponierende der durch die Gegenseiten g^2 und h^2 in p induzierten Hauptinvolution ist.

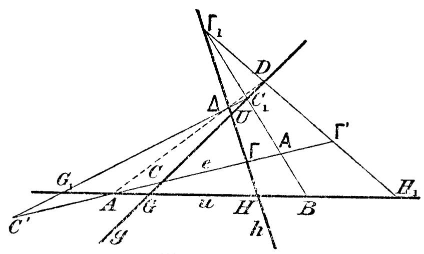

Fig. 118.

1. Lehrsatz: *In jeder Gerade werden durch die Polarfelder des Büschels konjugierte Involutionen erzeugt, die komponierende der Hauptpunktinvolution dieser Gerade sind.*

1. Lehrsatz: *In jedem Punkte werden durch die Polarfelder der Schar konjugierte Involutionen erzeugt, die komponierende der Hauptstrahleninvolution dieses Punktes sind.*

Oder, wenn wir das Wort adjungiert(168 Z₁) auch auf Polarfelder anwenden (vgl. 214):

2. *Die Hauptpunktinvolution einer beliebigen Gerade ist jedem Polarfelde des Büschels adjungiert.*

2. *Die Hauptstrahleninvolution eines beliebigen Punktes ist jedem Polarfelde der Schar adjungiert.*

Befreien wir diesen Satz von dem Begriffe des Büschels, so erhalten wir die allgemeinste Form des Lehrsatzes von Desargues(169):

3. *Sind zwei Gegenseiten einem Polarfelde konjugiert, so ist die Hauptpunktinvolution, die die beiden Gegenseiten in einer beliebigen Gerade induzieren*(134), *dem Polarfelde adjungiert.* —

3. *Sind zwei Gegenecken einem Polarfelde konjugiert, so ist die Hauptstrahleninvolution, die die beiden Gegenecken in einem beliebigen Punkte induzieren, dem Polarfelde adjungiert.* —

Weil jedes Polarfeld des Büschels durch eine komponierende der diagonalen Involution bestimmt ist[187], so ergiebt sich (als besonderer Fall des vorstehenden Satzes):

4. *Sind zwei Gegenseiten einem Polarfelde konjugiert, so ist ihre diagonale Involution dem Polarfelde adjungiert.*

4. *Sind zwei Gegenecken einem Polarfelde konjugiert, so ist ihre diagonale Involution dem Polarfelde adjungiert.*

195 195. **Die Polkurve.** Für das Polarfeld $(G\,G_1)$ ist die Verbindungslinie $C_1\,G_1$ (Fig. 119) die Polare von C und $\Gamma_1\,H_1$ die Polare von Γ; der Schnittpunkt E von $C_1 G_1$ und $\Gamma_1\,H_1$ ist daher der Pol der Gerade $C\,\Gamma = e$. Durchläuft G_1 die Diagonale (dreht sich, mit andern Worten, die zur Konstruktion der Punktpaare $G_1\,H_1$ benutzte[194] Gerade $D\,\Delta$ um A), so beschreiben $C_1\,(G_1)$ und $\Gamma_1\,(H_1)$ zwei projektive Strahlenbüschel, ihr Schnittpunkt E, der Pol von e, daher eine *zu* G_1 *projektive Punktreihe* zweiter Ordnung. Diese Punktreihe zweiter Ordnung heifst die Polkurve der Gerade e. Da sie nach unserer Konstruktion erhalten wird durch Projektion der diagonalen Involution $(G_1\,H_1)$ oder[136 Z] der Hauptinvolution $(C'\,\Gamma')$ aus C_1 und Γ_1, so ist die diagonale Involution von u und die Hauptinvolution von e der Polkurve konjugiert[98$_1$]. Da G und H zwei homologe Punkte der diagonalen Involution sind[135$_2$], so ist auch der Diagonalpunkt U ein Punkt unserer Kurve. Wir haben daher folgenden

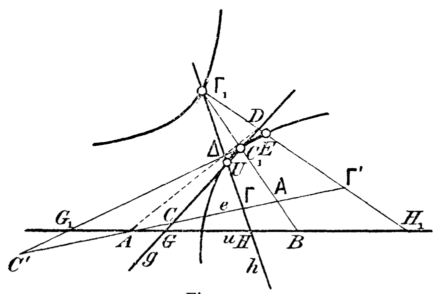

Fig. 119.

Lehrsatz: *Die Pole jeder Gerade* e *für sämtliche Polarfelder des Büschels liegen in einer Kurve zweiter Ordnung. Diese Polkurve ist bestimmt durch die diagonale Involution* u^2, *die Hauptinvolution* e^2 *und den Diagonalpunkt* U.

Lehrsatz: *Die Polaren jedes Punktes* E *für sämtliche Polarfelder der Schar bilden einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Dieser Polarenbüschel ist bestimmt durch die diagonale Involution* U^2, *die Hauptinvolution* E^2 *und die Diagonallinie* u.

Zusatz. Aus unserer Konstruktion ergiebt sich noch eine zweite Bestimmungsweise der Polkurve. Wir erhielten die Polkurve, indem wir den Strahl $A D \Delta$ um A sich drehen liefsen und die Punkte D und Δ aus C_1 und Γ_1 projizierten. Wir haben also den einfachsten Fall der Kurvenkonstruktion vor uns[56 Z]. C_1 und Γ_1 sind als Mittelpunkte der projektiven Strahlenbüschel Punkte der Polkurve, ihre Tangenten schneiden sich in A, so dafs die Polkurve bestimmt ist durch ihre drei Punkte $C_1\, \Gamma_1\, U$ und den Schnittpunkt A der Tangenten in C_1 und Γ_1:

1. Schneidet eine beliebige Gerade e die Träger $g\, h\, u$ in $C\, \Gamma\, A$, so geht die zugeordnete Polkurve $e_1{}^2$ durch C_1 und Γ_1, und die Tangenten von C_1 und Γ_1 schneiden sich in A. —

1. Wird ein beliebiger Punkt E aus $G\, H\, U$ durch $c\, \gamma\, a$ projiziert, so enthält der zugeordnete Polarenbüschel $E_1{}^2$ die Strahlen c_1 und γ_1, und die Berührungspunkte von c_1 und γ_1 liegen in a. —

Sind die Involutionen g^2 und h^2 hyperbolisch, so wird C_1 von C durch die Ordnungspunkte $K\, K_1$, Γ_1 von Γ durch die Ordnungspunkte $L\, L_1$ harmonisch getrennt[63s]. Da in diesem Falle von den Trägern $g_1\, h_1$ und $g_2\, h_2$ der Gegenseiten dasselbe gilt wie von $g\, h$[192 Z], so können wir unsern Satz, indem wir ihn vom Begriff des Büschels loslösen, so aussprechen:

2. *Satz vom Kegelschnitt der 9 Punkte.* Die 6 von einer beliebigen Gerade e durch je zwei Ecken eines Vierecks harmonisch getrennten Punkte und die 3 Diagonalpunkte des Vierecks liegen in einem Kegelschnitt. Die Verbindungslinien zweier Kurvenpunkte, die in zwei Gegenseiten des Vierecks liegen, gehen durch den Pol von e und haben den Schnittpunkt von e und der zugeordneten[16 Z] Diagonallinie zum Pol. —

2. *Satz vom Kegelschnitt der 9 Tangenten.* Die 6 von einem beliebigen Punkte E durch je zwei Seiten eines Vierseits harmonisch getrennten Geraden und die 3 Diagonallinien des Vierseits umhüllen einen Kegelschnitt. Die Schnittpunkte zweier Kurventangenten, die durch zwei Gegenecken des Vierseits gehen, liegen in der Polare von E und haben die Verbindungslinie von E und dem zugeordneten Diagonalpunkt zur Polare. —

Fällt e mit der uneigentlichen Gerade zusammen, so sind C_1, Γ_1 u. s. w. die Mitten(27₂) der Gegenseiten unsers Vierecks. Nehmen wir weiter an, dafs von dem Viereck $K K_1 L L_1$ zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen, so ist die Hauptinvolution(134 A) von e zirkular; die Polkurve ist also, weil ihr die Hauptinvolution von e konjugiert ist, ein Kreis(131₃). Als besonderer Fall des vorhergehenden Satzes ergiebt sich daher der aus der Planimetrie bekannte

> 3. *Satz des Feuerbach.* In einem Viereck, in dem zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen, liegen die Mitten der 6 Seiten und die 3 Diagonalpunkte in einem Kreise. Die Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten geht durch den Mittelpunkt(114₂) des Kreises und steht auf der zugeordneten Diagonallinie senkrecht(112₄) und halbiert sie(27₂).

Die Form, in welcher der Feuerbachsche Satz gewöhnlich ausgesprochen wird, erhält man(112 A), wenn man beachtet, dafs ein Viereck $K K_1 L L_1$, in welchem zwei Seiten auf ihren Gegenseiten senkrecht stehen, sich ansehen läfst als ein Dreieck $K K_1 L$ mit dem Höhenschnittpunkt L_1; die Fufspunkte der Höhen dieses Dreiecks sind die Diagonalpunkte des Vierecks. —

Nebenbei mag bemerkt werden, dafs man noch durch eine andere Spezialisierung zum Satz des Feuerbach gelangen kann, indem man von einem Viereck $K K_1 L L_1$ ausgeht, in welchem die vierte Ecke L_1 der Schwerpunkt des von den drei andern Ecken $K K_1 L$ gebildeten Dreiecks ist. Man hat dann den Kegelschnitt der 9 Punkte für diejenige Gerade e zu zeichnen, die die von den Fufspunkten der Höhen durch die Ecken des Dreiecks $K K_1 L$ harmonisch getrennten Punkte enthält. Hier aber soll auf die Begründung dieser Bemerkung und auf die aus ihr zu ziehenden Folgerungen nicht näher eingegangen werden.

A *Anmerkung.* Geht die Gerade e durch U, so dafs C und Γ in U liegen, so fällt C_1 in G und Γ_1 in H; der Schnittpunkt E von $C_1 G_1$ und $\Gamma_1 H_1$, d. i. von $G G_1$ und $H H_1$, liegt also in u, ist aber im übrigen unbestimmt. Fällt G_1 in G, H_1 also(166₅) in H, so wird der Schnittpunkt E ganz unbestimmt. Unsere Konstruktion reicht also für diesen Fall nicht aus. Wir sahen aber schon[(195)], daſs wir die Punkte E auch finden können, indem wir die homologen Punkte der Hauptinvolution von e aus C_1 und Γ_1, in unserm Falle also aus G und H projizieren. Da diese Hauptinvolution, wenn e durch U geht, hyperbolisch ist und die Ordnungspunkte U und A hat[(134 Z)], so erhalten wir als Ort für die Schnittpunkte homologer Strahlen die von e durch g und h harmonisch getrennte Gerade e'[(40$_1$)]; dazu kommt als zweite Gerade die Diagonale u, weil die homologen Strahlen $C_1(A)$ und $\Gamma_1(A)$ mit u zusammenfallen. — Daſs auch dann, wenn e durch U geht, der Satz richtig bleibt, daſs die Pole E von e eine zu G_1 projektive Punktreihe bilden, beweisen wir durch folgende Betrachtung.

Geht die Gerade e durch U, so liegt ihr Pol in der Polare von U und ist der Punkt E von u, welcher in der durch die Zuweisung $(G\,G_1)$ bestimmten konjugierten Involution von u dem Punkte A homolog ist. Dieser Punkt beschreibt aber nach Nr. 166_3 eine zu G_1 projektive Punktreihe. — Für die Kurve des Büschels, welche aus dem Geradenpaar $g\,h$ besteht[(192$_6$)], wird der Pol von e unbestimmt: jeder Punkt der von e durch g und h harmonisch getrennten Gerade e' kann als Pol angesehen werden. Daher:

Für eine Gerade e, welche durch den Diagonalpunkt U geht, zerfällt die Polkurve in zwei Geraden: die Diagonallinie und die von e durch g und h harmonisch getrennte Gerade e'.

Für einen Punkt E, welcher in der Diagonallinie u liegt, zerfällt der Polarenbüschel in zwei Punkte: den Diagonalpunkt und den von E durch G und H harmonisch getrennten Punkt E'.

196. **Absolut konjugierte Punkte.** In jedem Polar- 196
felde des Büschels ist dem beliebigen Punkte E eine bestimmte Gerade e als Polare zugeordnet, die wir finden[(193$_1$)], indem wir E aus G_1 und H_1, den Polen von g und h, durch c und γ projizieren und die Pole C und Γ von c und γ durch die Gerade e verbinden. Wir erhalten die Polaren e des festen Punktes E für sämtliche Polarfelder des Büschels, indem wir den Punkt G_1 die Gerade u durchlaufen lassen[(192$_3$)] und für jede Lage von G_1 in der eben angegebenen Weise die Polare e zeichnen. Bei dieser Bewegung des Poles G_1 ergiebt sich die Bewegung der

einzelnen Elemente am übersichtlichsten (Fig. 120) aus dem folgenden Schema[37 A]:

$$C^{(63_7)} \overline{\wedge}\, C_1\,[E]\, \overline{\overline{\wedge}}\, G_1^{(63_7)} \overline{\wedge}\, H_1\,[E]\, \overline{\overline{\wedge}}\, \Gamma_1^{(63_7)} \overline{\wedge}\, \Gamma.$$

Fällt G_1 in G, so fällt C_1 ebenfalls in G und C daher in U. Da gleichzeitig H_1 in H fällt[192_5], so fällt Γ_1 ebenfalls in H und daher Γ in U. Die von C und Γ beschriebenen Punktreihen sind daher in perspektiver Lage[34]; die Verbindungslinie $e = C\Gamma$, die Polare des Punktes E, beschreibt daher einen zu G_1 projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt wir mit E_1 bezeichnen wollen. Das Ergebnis fassen wir zusammen in dem Satze:

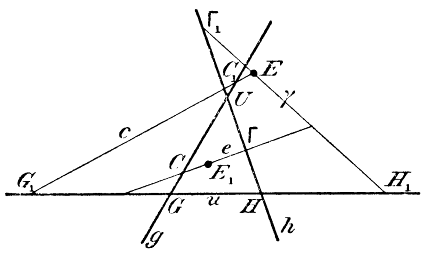

Fig. 120.

1. Zeichnet man sämtliche Polarfelder des Büschels, indem man der Seite g der Reihe nach jeden Punkt G_1 der Diagonale u als Pol zuweist, und bestimmt in jedem dieser Polarfelder die Polare des festen Punktes E, so erhält man einen Strahlenbüschel erster Ordnung E_1, der projektiv auf die von G_1 in u beschriebene Punktreihe bezogen ist.

1. Zeichnet man sämtliche Polarfelder der Schar, indem man der Ecke G der Reihe nach jeden Strahl g_1 des Diagonalpunktes U als Polare zuweist, und bestimmt in jedem dieser Polarfelder den Pol der festen Gerade e, so erhält man eine Punktreihe erster Ordnung e_1, die projektiv auf den von g_1 um U beschriebenen Strahlenbüschel bezogen ist.

Weil alle Polaren von E durch E_1 hindurchgehen, bilden E und E_1 ein Paar konjugierter Punkte[184_1] für jedes Polarfeld des Büschels. Nennen wir zwei solche Punkte *absolut konjugiert*, so haben wir:

2. *Jedem Punkte* E *ist hinsichtlich aller Polarfelder des Büschels ein bestimmter Punkt* E_1 *konjugiert.* E *und* E_1

2. *Jeder Gerade* e *ist hinsichtlich aller Polarfelder der Schar eine bestimmte Gerade* e_1 *konjugiert.* e *und* e_1 *werden*

werden zwei (*hinsichtlich des Büschels oder*) *absolut konjugierte Punkte genannt.*

zwei (*hinsichtlich der Schar oder*) *absolut konjugierte Geraden genannt.*

197. **Konstruktion des absolut konjugierten Punktes.** 197
Wir haben gesehen(196), daſs ein dem Punkte E hinsichtlich sämtlicher Polarfelder des Büschels konjugierter Punkt E_1 existiert. Jetzt wollen wir zeigen, wie man E_1 findet.

1. Aufgabe: *Den Punkt zu zeichnen, der einem gegebenen Punkte absolut konjugiert ist.*

1. Aufgabe: *Die Gerade zu zeichnen, die einer gegebenen Gerade absolut konjugiert ist.*

Wir legen durch E (Fig. 121) eine beliebige Gerade, die die Träger $g\,h\,u$ in $C_1\,\Delta_1\,G_2$ schneidet; die homologen Punkte, die wir $C\,\Delta\,H_2$ nennen, liegen in einer Gerade(133), die die Verbindungslinie $E\,U$ im Punkte X treffen möge. Schneidet die Verbindungslinie $X\,G_2$ die Träger g und h in D und Γ, so bilden $C\,D\,\Gamma\,\Delta$ ein Viereck, von dem X und U zwei Diagonalpunkte sind. Wir behaupten, daſs der dritte Diagonalpunkt, der Schnittpunkt der Gegenseiten $C\,\Gamma$ und $D\,\Delta$, der dem Punkte E absolut konjugierte Punkt E_1 ist.

Beweis: Betrachten wir das Viereck $E\,X\,G_2\,H_2$ (vergl. 133), so sehen wir, daſs zwei Paar Gegenseiten die Träger g und h in homologen Punkten schneiden; es müssen daher auch die Gegenseiten $E\,H_2$ und $X\,G_2$ die Träger g und h in homologen Punkten schneiden(64 Z); $E\,H_2$ schneidet also g und h in den den Punkten D und Γ homologen Punkten D_1 und Γ_1. — Durch die Zuweisung $(G\,G_2)$ ist ein Polarfeld des Büschels bestimmt, für welches C der Pol von $C_1\,G_2$ und Γ der Pol von $\Gamma_1\,H_2$, $C\,\Gamma$ also die Polare von E ist.

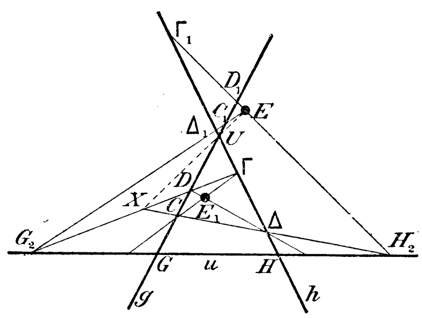

Fig. 121.

— Durch die Zuweisung $(G\,H_2)$ ist ein zweites Polarfeld bestimmt, für welches G_2 der Pol von h ist(1924). Für dieses Polarfeld ist D der Pol von $D_1\,H_2$ und Δ der Pol von $\Delta_1\,G_2$, $D\,\Delta$ also die Polare von E. E_1 ist mithin der

Schnittpunkt zweier Polaren des Punktes E und daher dem Punkte E absolut konjugiert(196). —

Aus dem Viereck $C D \Gamma \Delta$ ergiebt sich noch, weil die Gegenseiten des Diagonalpunktes U durch die beiden andern Diagonalpunkte E_1 und X harmonisch getrennt werden(24₂) und E in der Diagonallinie $X U$ liegt, der Lehrsatz (der sich auch als eine Folgerung aus Nr. 192_6 betrachten liefse):

2. Je zwei absolut konjugierte Punkte werden durch die Gegenseiten g und h harmonisch getrennt. —	2. Je zwei absolut konjugierte Geraden werden durch die Gegenecken G und H harmonisch getrennt. —

Da wir die eben angegebene Konstruktion noch mehrmals anzuwenden haben, so fassen wir sie in übersichtlicher Form zusammen (Fig. 121):

3. Um den dem Punkte E für den Büschel $(g h)$ absolut konjugierten Punkt E_1 zu finden, projizieren wir aus E zwei beliebige homologe Punkte G_2 und H_2 von u^2. Werden die Träger g und h von dem Strahle $E(G_2)$ in C_1 und Δ_1, von dem Strahle $E(H_2)$ in D_1 und Γ_1 geschnitten, so ist der Schnittpunkt E_1 von $C \Gamma$ und $D \Delta$ der dem Punkte E absolut konjugierte Punkt.

Zusatz. Fällt der Punkt E zusammen mit einem Punkte A (Fig. 122), in dem die Gerade $C \Gamma$ von der Verbindungslinie der homologen Punkte C_1 und Γ_1 geschnitten wird, so läfst sich der dem Punkte A absolut konjugierte Punkt A_1 vermittelst des Vierecks $C C_1 \Gamma \Gamma_1$ zeichnen. — Für das Polarfeld $(G A)$ ist C_1 der Pol von $C A$ und Γ der Pol von $\Gamma_1 B$, $C_1 \Gamma$ also die Polare von A. — Für das Polarfeld $(G B)$ ist C der Pol von $C_1 B$ und Γ_1 der Pol von ΓA, $C \Gamma_1$ also die Polare von A. Die Geraden $C_1 \Gamma$ und $C \Gamma_1$ schneiden sich also in dem dem Punkte A absolut konjugierten Punkte A_1:

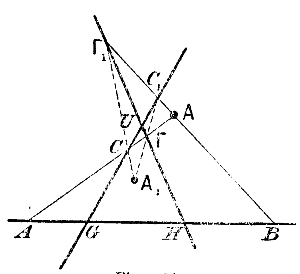

Fig. 122.

Sind $C C_1$ irgend zwei homologe Punkte von g^2 und $\Gamma \Gamma_1$ irgend zwei homologe Punkte von h^2, so bilden	Sind $c c_1$ irgend zwei homologe Strahlen von G^2 und $\gamma \gamma_1$ irgend zwei homologe Strahlen von H^2, so

$C C_1 \Gamma \Gamma_1$ ein Viereck, von dem U ein Diagonalpunkt ist. Die beiden andern Diagonalpunkte sind zwei absolut konjugierte Punkte.

bilden $c c_1 \gamma \gamma_1$ ein Vierseit, von dem u eine Diagonallinie ist. Die beiden andern Diagonallinien sind zwei absolut konjugierte Geraden.

198. **Die Kurve der absolut konjugierten Punkte.** 198
Um zum Punkte E den absolut konjugierten E_1 zu zeichnen, legten wir[197] durch E eine beliebige Gerade, die die Träger $g\,h\,u$ in $C_1\,\Delta_1\,G_2$ schnitt (Fig. 121). Lassen wir nun den Punkt E auf dieser Gerade sich bewegen, so bleiben aufser $C_1\,\Delta_1\,G_2$ auch die Punkte $C\,\Delta\,H_2$ fest. Bewegt sich daher E in $C_1\Delta_1$, so beschreibt X, weil $E\,U\,X$ in einer Gerade liegen, in $C\Delta$ eine zu E perspektive Punktreihe und wir haben[37 A]:

$$C(\Gamma) \overline{\wedge} \Gamma\,[G_2] \overline{\overline{\wedge}} D \overline{\overline{\wedge}} \Delta\,(D).$$

Die konjugierten Punkte E_1 stellen sich also als die Schnittpunkte homologer Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel dar, d. h.[42] sie bilden eine krumme Punktreihe. — Aus dem Viereck $C\,\Delta\,D\,\Gamma$ geht hervor, dafs die Gegenseiten $C(\Gamma)$ und $\Delta\,(D)$ die Diagonale u in homologen Punkten der diagonalen Involution[136] und die Gerade $C_1\,\Delta_1$ in homologen Punkten ihrer Hauptinvolution[136 Z] schneiden. Die Kurve der absolut konjugierten Punkte ist also identisch mit der Kurve der Pole von $C_1\,\Delta_1$ für die Polarfelder des Büschels[195]:

Die den Punkten einer Gerade e *absolut konjugierten Punkte bilden eine zur Punktreihe* e *projektive krumme Punktreihe, die mit der Polkurve von* e *identisch ist.*

Die den Strahlen eines Punktes E *absolut konjugierten Geraden bilden einen zum Strahlenbüschel* E *projektiven krummen Strahlenbüschel, der mit dem Polarenbüschel von* E *identisch ist.*

199. **Zweite Konstruktion des absolut konjugierten** 199
Punktes. Wir fanden[197] den dem Punkte E absolut konjugierten Punkt E_1, indem wir zu E die Polaren zeichneten für die Polarfelder $(G\,G_2)$ und $(G\,H_2)$. Wir geben jetzt noch die besondere Konstruktion, die sich ergiebt, wenn man die Polarfelder $(G\,G)$[192 6] und $(G\,H)$ zur Zeichnung von E_1 wählt. — Schneidet $E\,H$ (Fig. 123) den Träger g

in C_1 und EG den Träger h in Γ_1, so ist, weil für das Polarfeld (GH) das Dreieck UGH ein Poldreieck[184_3] ist, C der Pol von EH und Γ der Pol von EG, $C\Gamma$ also die Polare von E. Ferner sind von dem Viereck $C_1\Gamma_1GH$ die Punkte U und E zwei Diagonalpunkte; zeichnet man noch den dritten, den Schnittpunkt B von GH und $C_1\Gamma_1$, so geht die Verbindungslinie UB, weil sie von E durch g und h harmonisch getrennt ist, ebenfalls durch den konjugierten Punkt E_1[197_2]. Dieser ergiebt sich also als der Schnittpunkt von $C\Gamma$ und UB.

z *Zusatz.* Diese Konstruktion führt uns zu einem wichtigen Satze über die Hauptstrahleninvolution, welche die Gegenseiten g^2 und h^2 und die diagonale Involution u^2 in einem beliebigen Punkte E induzieren[170]. Wir wenden unsere Aufmerksamkeit der Gerade zu, die den Punkt E mit seinem absolut konjugierten E_1 verbindet, um nachzuweisen, daſs der Strahl $E(E_1)$ in der Hauptinvolution von E dem Strahle $E(U)$ homolog ist. — In der ersten der beiden Strahleninvolutionen, durch welche g^2 und h^2 aus E projiziert werden, ist dem Strahle $E(U)$ der Strahl $E(G)$ homolog; diesem entspricht, weil $E(G)$ den Träger h (Fig. 123) in Γ_1 schneidet, in der zweiten Involution $E(\Gamma)$. Ferner ist dem Strahle $E(U)$ in der zweiten Involution der Strahl $E(H)$ homolog; diesem entspricht, weil $E(H)$ den Träger g in C_1 schneidet, in der ersten Involution der Strahl $E(C)$. Der dem Strahle $E(U)$ in der resultierenden Involution homologe Strahl ist also[162] der von $E(U)$ durch $E(\Gamma)$ und $E(C)$ harmonisch getrennte. Dies ist aber $E(E_1)$, weil, wie sich aus dem Viereck $GHC_1\Gamma_1$ ergiebt[24_2], $U(EB.GH)$ ein harmonischer Wurf ist, E_1 also[21_3] von UE durch C und Γ harmonisch getrennt wird:

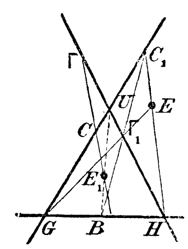

Fig. 123.

In der Hauptstrahleninvolution, welche durch die Gegenseiten g² *und* h² *und die diagonale Involution* u² *in einem beliebigen Punkte* E *induziert wird, sind die beiden Strahlen, welche durch den Diagonalpunkt*

In der Hauptpunktinvolution, welche durch die Gegenecken G² *und* H² *und die diagonale Involution* U² *in einer beliebigen Gerade* e *induziert wird, sind die beiden Punkte, welche in der Diagonallinie* u *und der*

U *und den absolut konjugierten Punkt* E_1 *gehen, einander homolog.*

absolut konjugierten Gerade e_1 *liegen, einander homolog.*

Anmerkung. Wir haben den vorstehenden Satz unmittelbar A
aus der Konstruktion des absolut konjugierten Punktes abgeleitet, trotzdem wir ihn aus Nr. 188 hätten folgern können. Da nämlich zu den Polarfeldern des Büschels auch dasjenige gehört, welches durch den Punkt E als Ordnungspunkt bestimmt ist, und für dieses[188,4] die Polare von E der Strahl von E ist, welcher in E^2 dem Strahle $E(U)$ homolog ist, so mufs dieser Strahl als eine der Polaren von E durch E_1 gehen[196,1].

200. **Konstruktion eines Polarfeldes mit gegebenem Ordnungspunkte.** An den vorstehenden Satz knüpfen wir die Konstruktion, auf die wir bereits[100 A] hingewiesen haben. 200

1. Aufgabe: *Die Ordnungskurve des Büschels zu zeichnen, welche durch einen gegebenen Punkt geht.*

1. Aufgabe: *Die Kurve der Schar zu zeichnen, welche eine gegebene Gerade berührt.*

Wenn wir diese Aufgabe aussprechen, ohne den Begriff eines Büschels von Polarfeldern zu benutzen, so erkennen wir, dafs sie identisch ist mit der in Nr. 100 gelösten: Eine Kurve zu zeichnen, für die ein Punkt und zwei konjugierte Punktinvolutionen gegeben sind.

Von dieser Fundamentalaufgabe geben wir an dieser Stelle eine zweite Lösung; eine dritte folgt in Nr. 203.

Da wir die bisher benutzten Bezeichnungen beibehalten, so genügt es, den Gang der Lösung anzugeben. — Wir zeichnen[199] den Punkt E_1 (Fig. 124), welcher dem gegebenen Punkte E absolut konjugiert ist. Die Strahlen $E(U)$ und $E(E_1)$ sind einander homolog[199 Z] in der Hauptinvolution, welche die gegebenen Punktinvolutionen g^2 und h^2 in E induzieren[170], und schneiden daher[188,6] die Diagonale u in zwei konjugierten Punkten J und J_1. Zum Punkte J zeichnen wir[136] den ihm in der diagonalen Involution homologen Punkt K und zu J_1 den homologen Punkt K_1. Es sind dann auch K und K_1 zwei einander konjugierte Punkte[166,4], so dafs die konjugierte Involution der Diagonale $JJ_1 . KK_1$ ist. Da U der Pol von u ist[192,2], so ist der von E durch

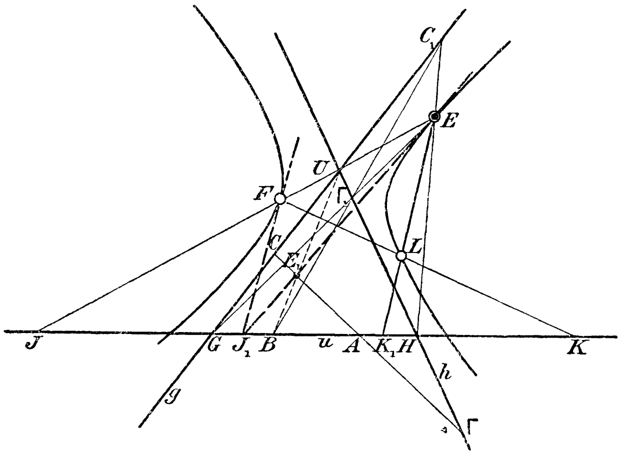

Fig. 124.

U und u harmonisch getrennte Punkt F ein zweiter Kurvenpunkt[86_2]. Wir erhalten also[98_3] die Kurve, indem wir die konjugierte Involution $J J_1 . K K_1$ aus E und F projizieren. — Für die Ausführung der Konstruktion ist noch zu bemerken, dafs J_1 der Schnittpunkt der Tangenten in E und F ist[45]; wenn wir also noch den Schnittpunkt der Strahlen $E(K_1)$ und $F(K)$ durch L bezeichnen, so können wir die Kurve aus den drei Punkten $E F L$ und dem Schnittpunkt L der Tangenten in E und F zeichnen[56 Z].

z *Zusatz.* Hat die Involution g^2 die Ordnungspunkte M und M_1, so sind $E(M)$ und $E(M_1)$ zwei homologe Strahlen der Hauptstrahleninvolution E^2[161_1] und schneiden daher[188_4] die Diagonale in zwei konjugierten Punkten. Wir kommen also für den Fall, dafs g^2 Ordnungspunkte hat, zurück auf den Satz[98_4], dafs zwei Kurvenpunkte M und M_1, die mit U in einer Gerade liegen, aus einem beliebigen Kurvenpunkte E durch zwei Strahlen projiziert werden, die die Polare von U in zwei konjugierten Punkten schneiden.

201 201. **Die absolut konjugierten Punkte als Ordnungspunkte.** In Nr. 188 haben wir die Bedeutung der Hauptstrahleninvolution E^2 eines beliebigen Punktes E für das durch $g^2 h^2$ und E bestimmte Polarfeld erkannt. In Nr. 199

sahen wir dann, dafs diese Hauptstrahleninvolution E^2 auch in Beziehung steht zu dem dem Punkte E absolut konjugierten Punkte E_1: der Strahl $E(E_1)$ ergab sich als der dem Strahle $E(U)$ in E^2 homologe. Aus diesen beiden Beziehungen ergiebt sich nun noch ein Zusammenhang zwischen zwei absolut konjugierten Punkten und der Hauptpunktinvolution ihrer Verbindungslinie EE_1.

Schneidet der dem Strahle $E(U)$ in E^2 homologe die Träger ghu (Fig. 125) in $C\,\Gamma\,A$, so sind $E(G)$ und $E(C_1)$, $E(H)$ und $E(\Gamma_1)$ ebenfalls homologe Strahlen der Hauptinvolution E^2[166_4] und schneiden h und g in zwei Punkten Δ_1 und D_1, die mit A in einer Gerade liegen[170 Z_1]. Der dem

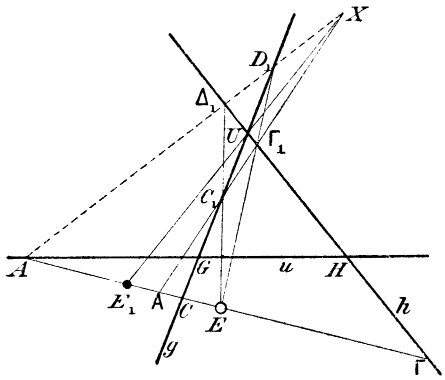

Fig. 125.

Punkte E absolut konjugierte E_1 liegt[199] in $E(C)$ und ist von E durch C und Γ harmonisch getrennt[197_2]. Wir können ihn also zeichnen vermittelst des Vierecks $C_1\,\Gamma_1\,D_1\,\Delta_1$, von dem U und E zwei Diagonalpunkte sind; zeichnen wir noch den dritten Diagonalpunkt, den Schnittpunkt X von $C_1\,\Gamma_1$ und $D_1\,\Delta_1$, so schneidet die Diagonallinie $X\,U$ die Gerade EC in dem von E durch C und Γ harmonisch getrennten Punkte[24_2], d. i. in E_1. Bezeichnen wir den Punkt, in dem $C\,\Gamma$ von $C_1\,\Gamma_1$ geschnitten wird, durch A, so bilden auch $A\,\mathrm{A}\,.\,EE_1$ einen harmonischen Wurf[24_2]. $A\,\mathrm{A}$ und $C\,\Gamma$ sind also zwei Paar homologe Punkte der durch die Ordnungspunkte E und E_1 bestimmten Involution[63_3]. Der Wurf $A\,\mathrm{A}\,.\,C\,\Gamma$ bestimmt aber die Hauptpunktinvolution der Gerade EE_1[135_3]:

1. Zwei absolut konjugierte Punkte sind die Ordnungspunkte der Hauptpunktinvolution ihrer Verbindungslinie. —

1. Zwei absolut konjugierte Geraden sind die Ordnungsstrahlen der Hauptstrahleninvolution ihres Schnittpunktes. —

Die Umkehrung dieses Satzes:

2. Hat eine Hauptpunktinvolution zwei Ordnungspunkte, so sind diese einander absolut konjugiert,

2. Hat eine Hauptstrahleninvolution zwei Ordnungsstrahlen, so sind diese einander absolut konjugiert,

ist richtig, weil jede Hauptpunktinvolution den Polarfeldern des Büschels adjungiert ist[194$_2$] und die Ordnungspunkte einer adjungierten Involution einander konjugiert sind[161$_1$].

202 202. **Drei Büschel von Polarfeldern.** Ebenso wie die Gegenseiten g^2 und h^2 einen Büschel von Polarfeldern bestimmen, so bestimmen auch g^2 und die diagonale Involution u^2 und ferner h^2 und u^2 je einen Büschel von Polarfeldern.

1. Die drei Büschel $(g\,h)$ $(g\,u)$ $(h\,u)$ bestimmen in jedem Punkte E eine und dieselbe Hauptstrahleninvolution E^2[170]. —

1. Die drei Scharen $(G\,H)$ $(G\,U)$ $(H\,U)$ bestimmen in jeder Gerade e eine und dieselbe Hauptpunktinvolution e^2. —

Ist a eine beliebige Gerade, welche die Träger $g\,h\,u$ in $C\,\Gamma\,A$ schneidet und von der Gerade, in der die drei homologen Punkte $C_1\,\Gamma_1\,B$ liegen, in A geschnitten wird, so ist die Hauptpunktinvolution von a[135$_3$]

für den Büschel $(g\,h)$: $C\,\Gamma\,.\,A\,\mathsf{A}$;

für den Büschel $(g\,u)$: $C\,A\,.\,\Gamma\,\mathsf{A}$;

für den Büschel $(h\,u)$: $\Gamma\,A\,.\,C\,\mathsf{A}$.

2. Die drei Büschel $(g\,h)$ $(g\,u)$ $(h\,u)$ erzeugen in jeder Gerade drei Hauptpunktinvolutionen, von denen je zwei komponierende der dritten sind[167$_1$]. Immer zwei dieser Hauptpunktinvolutionen haben Ordnungspunkte, die dritte nicht[167$_3$]; das eine

2. Die drei Scharen $(G\,H)$ $(G\,U)$ $(H\,U)$ erzeugen in jedem Punkte drei Hauptstrahleninvolutionen, von denen je zwei komponierende der dritten sind. Immer zwei dieser Hauptstrahleninvolutionen haben Ordnungsstrahlen, die dritte nicht; das eine

Paar der Ordnungspunkte wird durch das andere harmonisch getrennt$^{(161_2)}$.

Paar der Ordnungsstrahlen wird durch das andere harmonisch getrennt.

Wie wir den dem Punkte E für $(g\,h)$ absolut konjugierten Punkt E_1 gezeichnet haben$^{(197_3)}$, so können wir auch den dem Punkte E für $(g\,u)$ konjugierten Punkt L und den ihm für $(h\,u)$ konjugierten Punkt M zeichnen. Dieselben Betrachtungen wie die in Nr. 199 Z angestellten zeigen dann (Fig. 125), dafs in der resultierenden Involution von E der dem Strahle $E(G)$ homologe $E(\Delta_1)$ durch L und der dem Strahle $E(H)$ homologe $E(D_1)$ durch M geht; und aus Nr. 197_2 folgt, dafs L von E durch g und u und M von E durch h und u harmonisch getrennt ist. Diese Punkte L und M nun können wir durch eine Fortsetzung der in der vorigen Nummer begonnenen Konstruktion finden. Bezeichnen wir noch den Punkt, in dem u von $C_1\,\Gamma_1$ geschnitten wird, durch B (Fig. 126), so zeigt das Viereck $A\,B\,E_1\,X$,

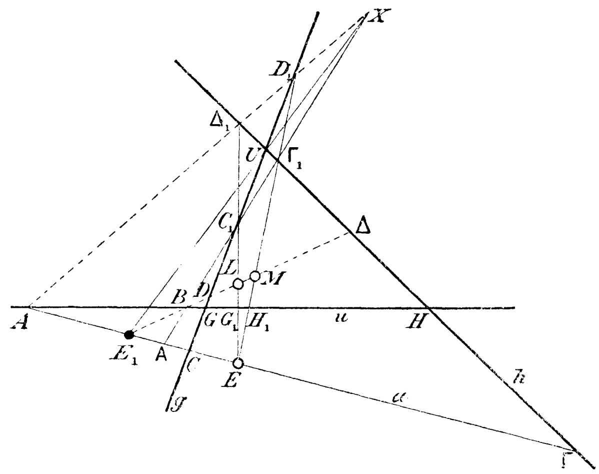

Fig. 126.

von dem zwei Paar Gegenseiten sowohl g als h in konjugierten Punktpaaren schneiden, dafs die Seite $E_1\,B$ die Träger g und h in den den Punkten D_1 und Δ_1 homologen Punkten D und Δ schneidet. Da $E\,E_1 . \Lambda\,A$ vier harmonische Punkte$^{(201)}$, mithin $B\,(E\,E_1 . \Lambda\,A)$ vier harmonische Strahlen sind, so wird $E\Delta_1$ von BE_1 in dem von E durch C_1 und G_1 harmonisch getrennten Punkte geschnitten[(21₃)]; ebenso wird ED_1 von BE_1 in dem von E durch Γ_1 und H_1 harmonisch getrennten Punkte geschnitten. Diese Schnittpunkte sind also die dem Punkte E für den Büschel (gu) und für den Büschel (hu) absolut konjugierten Punkte L und M; denn sie liegen in den den Strahlen $E(G)$ und $E(H)$ in der Hauptstrahleninvolution E^2 homologen Strahlen $E(\Delta_1)$ und $E(D_1)$ und sind von E durch gu und hu harmonisch getrennt:

3. *Die drei Punkte* $\mathrm{E_1\,L\,M}$, *die einem beliebigen Punkte* E *für die Büschel* (g h) (g u) (h u) *absolut konjugiert sind, liegen in einer Gerade.* Diese Gerade schneidet (Fig. 126) ghu in drei Punkten $D\Delta B$, denen in $g^2h^2u^2$ homolog sind die drei Punkte $D_1\Delta_1A$, in denen ghu geschnitten werden von den Strahlen, welche in der Hauptstrahleninvolution E^2 den Strahlen $E(HGU)$ homolog sind.

3. *Die drei Geraden* $\mathrm{e_1\,l\,m}$, *die einer beliebigen Gerade* e *für die Scharen* (G H) (G U) (H U) *absolut konjugiert sind, gehen durch einen Punkt.* Dieser Punkt wird aus GHU durch drei Strahlen $d\delta b$ projiziert, denen in $G^2H^2U^2$ homolog sind die drei Strahlen $d_1\delta_1a$, durch welche aus GHU die drei Punkte projiziert werden, welche in der Hauptpunktinvolution e^2 den Punkten $e(hgu)$ homolog sind.

203 203. **Allgemeine Kurvenkonstruktion.** Der Punkt L (ebenso wie der Punkt M), den wir in der vorigen Nummer als den dem Punkte E für den Büschel (gu) absolut konjugierten Punkt gezeichnet haben, gewinnt eine neue Bedeutung, wenn wir beachten, daſs er in dem Strahle liegt, welcher dem Strahle $E(G)$ in der Hauptstrahleninvolution E^2 homolog ist. Dieser Strahl schneidet[(188₃)] die Diagonale u in dem Punkte G_1, welcher für das durch g^2 und h^2 und E bestimmte Polarfeld der Pol von g ist. Der Punkt L ist also, weil er von E durch den Punkt G_1 und seine Polare g harmonisch getrennt ist, ein Punkt der Ordnungskurve dieses Polarfeldes, so daſs wir diese Ordnungskurve erhalten[(98₃)], wenn wir die Involution g^2 aus E und L projizieren. *Die Konstruktion dieser Kurve und die Konstruktion der Hauptstrahleninvolution* E^2 *sind also im Grunde zwei identische Aufgaben,* und die in Nr. 200 gegebene Lösung, die sich auf

die Konstruktion des dem Punkte E für den Büschel $(g\,h)$ absolut konjugierten Punktes E_1 stützt, unterscheidet sich nicht wesentlich von der folgenden. —

Aufgabe: *Eine Kurve zu zeichnen, für die ein Punkt und zwei konjugierte Punktinvolutionen gegeben sind.*

Aufgabe: *Eine Kurve zu zeichnen, für die eine Tangente und zwei konjugierte Strahleninvolutionen gegeben sind.*

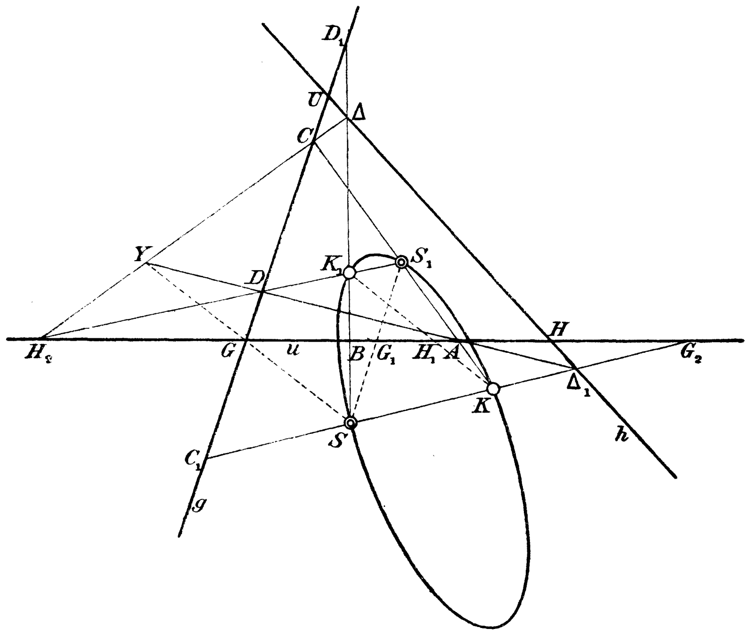

Fig. 127.

Den gegebenen Punkt wollen wir (nicht wie bisher durch E, sondern) durch S bezeichnen und den ihm für den Büschel $(g\,u)$ absolut konjugierten Punkt (den wir bisher durch L bezeichneten), durch S_1. Wir haben dann die Konstruktion der Nr. 197_3 von dem Büschel $(g\,h)$ auf den Büschel $(g\,u)$ zu übertragen:

Wir projizieren aus S (Fig. 127) zwei beliebige homologe Punkte Δ und Δ_1 von h^2. Werden die Träger g und u von dem Strahle $S(\Delta_1)$ in C_1 und G_2, und von dem Strahle $S(\Delta)$ in D_1 und B geschnitten, so ist der Schnittpunkt S_1

von CA und DH_2 der dem Punkte S für den Büschel (gu) absolut konjugierte Punkt.

Ausführung der Konstruktion: Wir legen durch S eine beliebige Gerade, die die Träger $g\,h\,u$ in $C_1\,\Delta_1\,G_2$ schneidet; die homologen Punkte, die wir $C\,\Delta\,H_2$ nennen, liegen in einer Gerade[133], die die Verbindungslinie SG in dem Punkte Y treffen möge. Schneidet die Verbindungslinie $Y\Delta_1$ die Träger g und u in D und A, so bilden $CDAH_2$ ein Viereck, von dem G und Y zwei Diagonalpunkte sind. Der dritte Diagonalpunkt, der Schnittpunkt von CA und DH_2, ist der dem Punkte S absolut konjugierte Punkt S_1. Projizieren wir die Involution g^2 aus S und S_1, so erhalten wir die gesuchte Kurve.

Bemerkungen zur Konstruktion: Die gezeichneten Linien liefern uns noch weitere Kurvenpunkte. Das Viereck $SY\Delta\Delta_1$, von dem zwei Paar Gegenseiten sowohl g als u in homologen Punkten schneiden, zeigt, dafs auch die Gegenseiten $Y\Delta_1$ und $S\Delta$ die Geraden g und u in homologen Punkten schneiden, dafs also $S\Delta$ den Träger g in D_1 und den Träger u in B schneidet. — Die Strahlen $S(C_1)$ und $S_1(C)$ liefern, weil sie durch die homologen Punkte C_1 und C von g^2 gehen, den neuen Kurvenpunkt K und die Strahlen $S(D_1)$ und $S_1(D)$ den Kurvenpunkt K_1. — Zwei Paar Gegenseiten des Kurvenvierecks SS_1KK_1 schneiden die Diagonale in homologen Punktpaaren G_2H_2 und AB der diagonalen Involution; es schneidet daher auch das dritte Paar Gegenseiten SS_1 und KK_1 die Diagonale u in zwei homologen Punkten G_1 und H_1 von u^2. Weil nun $S(S_1)$ nach unserer Konstruktion dem Strahle $S(G)$ in der Hauptstrahleninvolution S^2 homolog ist, so ist G_1 der Pol von g[188$_5$] und folglich[192$_4$] H_1 der Pol von h; wir erhalten daher[98$_3$] die Kurve auch durch Projektion der Involution h^2 aus K und K_1. — Weil der Pol von SS_1 in g und der Pol von KK_1 in h liegt, so schneidet die (in der Figur nicht gezeichnete) Diagonallinie des Kurvenvierecks SS_1KK_1, welche den Gegenseiten SS_1 und KK_1 zugeordnet ist[16 Z], den Träger g in dem Schnittpunkte der Tangenten[53] von S und S_1 und den Träger h in dem Schnittpunkte der Tangenten von K und K_1.

Anmerkung. Ein besonderer Fall dieser Konstruktion ist die in Nr. 100 gegebene. Dadurch dafs wir nicht von einem beliebigen Strahl des Punktes S, sondern von dem

Strahl $S(H)$ ausgingen, liefs sich die Konstruktion von dem Begriff der absolut konjugierten Punkte befreien und soweit vereinfachen, dafs sie gleich nach der Einführung der konjugierten Involution begründet und zur *Grundlage unserer Darstellung* der Geometrie der Lage gemacht werden konnte.

204. **Andere Definition der Ordnungskurve.** Aus 204
der vorhergehenden Konstruktion läfst sich noch ein wichtiger Satz ableiten. Schneidet $G_2 D_1$ (Fig. 128) den Träger h in E, so bilden die Punkte $C \Delta D_1$ E ein Viereck, von dem zwei Paar Gegenseiten durch die homologen Punkte GH und $G_2 H_2$ der diagonalen Involution gehen. Da die fünfte Seite ΔD_1 durch B geht, so mufs die Seite CE durch A gehen[64 Z]. Bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von $C\Delta$ und $C_1 \Delta_1$ durch B, so ist die Hauptpunktinvolution[135₂] von $C_1 \Delta_1$ bestimmt durch $C_1 \Delta_1 . G_2$ B. Unser Viereck $C \Delta D_1$ E zeigt nun, dafs auch S und K zwei homologe Punkte dieser Involution sind. Zeichnen wir also in jedem durch den Punkt S gehenden Strahle den ihm in der Hauptpunktinvolution dieses Strahles homologen Punkt, so erkennen wir, weil K auf der durch S als Ordnungspunkt bestimmten Kurve liegt[203], den

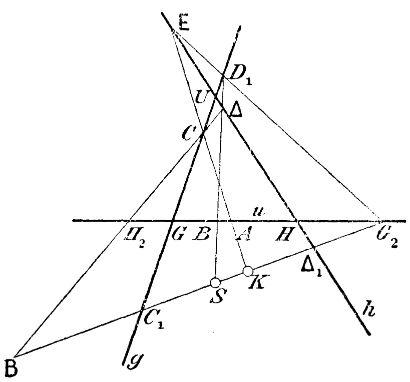

Fig. 128.

Lehrsatz: Die Punkte, welche einem festen Punkte in den Hauptpunktinvolutionen der durch ihn gehenden Strahlen homolog sind, liegen in einer Kurve zweiter Ordnung; diese Kurve ist identisch mit der Ordnungskurve des Büschels, die durch den festen Punkt geht.

Lehrsatz: Die Strahlen, welche einer festen Gerade in den Hauptstrahleninvolutionen der in ihr liegenden Punkte homolog sind, umhüllen eine Kurve zweiter Ordnung; diese Kurve ist identisch mit der Ordnungskurve der Schar, die die feste Gerade berührt.

205 205. **Projektive Verwandtschaft zwischen einem Büschel von Polarfeldern und einem Grundgebilde.** Für manche Sätze erhält man eine bequeme Ausdrucksweise, wenn man den Begriff der projektiven Verwandtschaft auf die Polarfelder eines Büschels ausdehnt; wir werden zu dieser Erweiterung des Begriffes der projektiven Verwandtschaft durch den Satz(192₃) geführt, dafs wir die sämtlichen Polarfelder eines Büschels erhalten, wenn wir den Punkt G_1 die Diagonale u durchlaufen lassen.

1. Definition. *Ein Büschel* (g h) *von Polarfeldern und ein Grundgebilde heifsen projektiv, wenn das Grundgebilde projektiv auf die Punktreihe der Pole* G_1 *von* g *bezogen ist.*

1. Definition. *Eine Schar* (G H) *von Polarfeldern und ein Grundgebilde heifsen projektiv, wenn das Grundgebilde projektiv auf den Strahlenbüschel der Polaren* g_1 *von* G *bezogen ist.*

Mit Hülfe dieser Definition können wir den Satz in Nr. 196_1 so fassen:

2. Ein gerader Strahlenbüschel E ist projektiv auf den Büschel von Polarfeldern bezogen, wenn man jedem Strahle das Polarfeld zuordnet, für welches er die Polare des seinem Mittelpunkte E absolut konjugierten Punktes E_1 ist.

2. Eine gerade Punktreihe e ist projektiv auf die Schar von Polarfeldern bezogen, wenn man jedem Punkte von e das Polarfeld zuordnet, für welches er der Pol der seinem Träger absolut konjugierten Gerade e_1 ist.

Ferner ergiebt sich aus der Bemerkung in Nr. 195, dafs die Pole E einer Gerade e projektiv auf G_1 bezogen sind:

3. Eine Polkurve $e_1{}^2$ ist projektiv auf den Büschel von Polarfeldern bezogen, wenn man jedem Punkte von $e_1{}^2$ das Polarfeld zuordnet, für welches er der Pol der zugeordneten Gerade e ist. —

3. Ein Polarenbüschel $E_1{}^2$ ist projektiv auf die Schar von Polarfeldern bezogen, wenn man jedem Strahle von $E_1{}^2$ das Polarfeld zuordnet, für welches er die Polare des zugeordneten Punktes E ist. —

Hat die Involution g^2 die Ordnungspunkte K und K_1, so hat jedes Polarfeld des Büschels eine Ordnungskurve(189). Ein solcher Punkt $K (K_1)$, durch den sämtliche Ordnungskurven hindurchgehen, soll ein *Grundpunkt* des Büschels genannt werden. — Ist c eine beliebige durch den Grundpunkt K gehende Gerade, welche u in A schneidet, so erhält man die durch die Zuweisung $(G\,G_1)$ bestimmte Ordnungskurve, wenn man die konjugierte Involution $G\,G_1 \,.\, H\,H_1$(192₅) von u aus K und K_1 projiziert(98₃). Ist also A_1 der dem Punkte A in dieser Involution homologe Punkt, so ist der Schnittpunkt A von $K(A)$ und $K_1\,(A_1)$ ein Punkt der Ordnungskurve des Polarfeldes $(G\,G_1)$. Da nun, wenn G_1 die Diagonale u durchläuft, der Punkt A_1 eine zu G_1 projektive(166₃) und A in c eine zu A_1 perspektive Punktreihe beschreibt, so haben wir:

4. Eine gerade Punktreihe, deren Träger durch einen Grundpunkt des Büschels geht, ist projektiv auf den Büschel bezogen, wenn man jedem Punkte der Gerade das Polarfeld zuweist, dessen Ordnungskurve durch ihn hindurchgeht.	4. Ein gerader Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in einer Grundseite der Schar liegt, ist projektiv auf die Schar bezogen, wenn man jedem Strahl das Polarfeld zuweist, dessen Ordnungskurve ihn berührt.

§ 18. Die Involution dritter Ordnung.

206. **Projektive Verwandtschaft einer geraden und einer krummen Punktreihe.** 206

Aufgabe: Eine gerade und eine krumme Punktreihe projektiv so aufeinander zu beziehen, dafs drei Punkten der einen drei Punkte der andern homolog sind.

Sollen die Punkte $A_1\,B_1\,C_1$ der krummen Punktreihe p^2 den Punkten $A\,B\,C$ der geraden Punktreihe p homolog sein, so projizieren wir aus einem beliebigen Punkte von p^2 (in der Figur 129 aus A_1) die Punkte $A\,B\,C$ der Gerade p auf p^2 und beziehen die erhaltene Punktreihe $\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,\Gamma_1$ und die gegebene $A_1\,B_1\,C_1$ projektiv aufeinander durch Konstruktion der Projektionsachse u(74), indem wir den

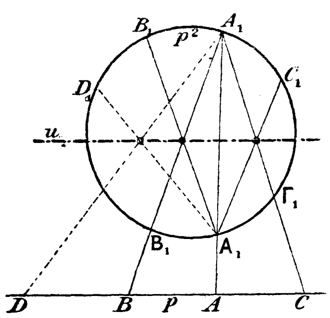

Fig. 129.

Punkt, in welchem $A_1 B$ von $\mathsf{A}_1 B_1$ geschnitten wird, verbinden mit dem Punkt, in welchem $A_1 C$ von $\mathsf{A}_1 C_1$ geschnitten wird. Zu einem beliebigen Punkte D_1 von p^2 erhalten wir dann den homologen D von p, indem wir den Punkt, in welchem $\mathsf{A}_1 D_1$ die Projektionsachse schneidet, aus A_1 auf p projizieren.

207 207. **Involutorische Verwandtschaft einer geraden und einer krummen Punktreihe.** Wichtiger als der eben behandelte allgemeine Fall ist ein besonderer. Wir nehmen an, dafs die Geraden, welche die Punkte B und C von p aus dem Kurvenpunkte A_1 projizieren, p^2 in den homologen Punkten C_1 und B_1 schneiden und dafs zugleich die Verbindungslinie $B_1 C_1$ durch den dem Punkte A_1 homologen Punkt A geht (Fig. 130). Nach dieser Annahme entsprechen also den Punkten $A_1 B_1$ (von p^2) und C (von p), die in einer Gerade liegen, die Ecken eines Dreiecks $A B C_1$, dessen Seiten durch die Punkte $A_1 B_1 C$ gehen.

1. *Von einem solchen Dreieck* $\mathrm{A\,B\,C}_1$, *dessen Seiten durch die den Gegenecken homologen Punkte gehen, wollen wir sagen, dafs es perspektiv zu den drei Punkten* $\mathrm{A}_1\,\mathrm{B}_1\,\mathrm{C}$ *liegt, und von einer geraden und krummen Punktreihe, die in der angegebenen Weise projektiv aufeinander bezogen sind, dafs sie involutorisch liegen.*

Lösen wir für diese Lage der drei Punkte $A B C$ und der ihnen homologen $A_1 B_1 C_1$ die Aufgabe, die beiden Punktreihen projektiv aufeinander zu beziehen, so haben wir(206) die drei Punkte $A B C$ aus A_1 auf die Kurve zu projizieren. Da jetzt die Punkte B_1 und Γ_1 in C_1 und B_1 fallen (Fig. 130), so ergiebt sich als Projektionsachse die Gerade, welche den Schnittpunkt von $A_1 B$ und $\mathsf{A}_1 B_1$ mit dem Schnittpunkte von $A_1 C$ und $\mathsf{A}_1 C_1$ verbindet.

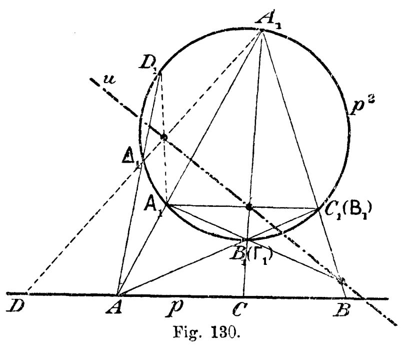

Fig. 130.

Die Projektionsachse u ist also, wie das Kurvenviereck $A_1 B_1 C_1 \mathsf{A}_1$ ergiebt, die Polare des Punktes A(86₁). Zu einem beliebigen Punkt D_1 von p^2 erhalten wir jetzt den homologen D von p, indem wir den Punkt, in dem $\mathsf{A}_1 D_1$ die Projektionsachse schneidet, aus A_1 auf p projizieren. — Projiziert man also die gerade Punktreihe p aus A_1 und die krumme p^2 aus dem Punkte A_1, in dem die Verbindungslinie der beiden homologen Punkte A_1 und A die Kurve zum zweiten Male schneidet, so liegen die beiden projektiven Strahlenbüschel A_1 und A_1 perspektiv zu der Polare von A in Bezug auf p^2. Schneidet die Gerade $A_1 D$ die Kurve in Δ_1, so bilden $A_1 \mathsf{A}_1 D_1 \Delta_1$ ein Kurvenviereck, dessen einer Diagonalpunkt, der Schnittpunkt von $A_1 \Delta_1$ und $D_1 \mathsf{A}_1$, dem Punkte A konjugiert ist. Es geht daher(97) $D_1 \Delta_1$ durch A. Danach erhalten wir zu einem beliebigen Punkte D von p den zugeordneten D_1 von p^2 durch die folgende Konstruktion:

2. *Zu einem beliebigen Punkte* D *(Fig. 130) von* p *finden wir den zugeordneten* D_1 *von* p^2, *indem wir den Punkt* Δ_1, *in welchem* $\mathrm{A}_1 \mathrm{D}$ *die Kurve schneidet, aus* A *auf* p^2 *projizieren.* —

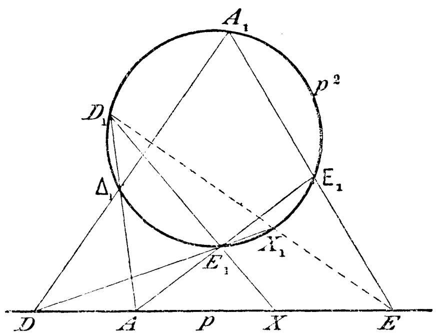

Fig. 131.

Nehmen wir an, dafs auf diese Weise zu den beiden Punkten D und E (Fig. 131) vermittelst der Punkte Δ_1 und E_1 die Punkte D_1 und E_1 gefunden wären, so ergiebt sich, wenn wir noch den Schnittpunkt von p^2 und $D E_1$ durch X_1 bezeichnen, aus der Betrachtung des Kurvensechsecks $A_1 \mathsf{E}_1 E_1 X_1 D_1 \Delta_1$, dafs $D_1 X_1$ durch E geht(54), d. h. $D_1 E$ wird von $D E_1$ in einem Kurvenpunkte geschnitten.

3. Lehrsatz: *Sind eine gerade und eine krumme Punktreihe in involutorischer Lage, so wird jede Gerade, welche einen beliebigen Punkt* D *von* p *mit einem beliebigen Punkte* E_1 *von* p^2 *verbindet, von der Verbindungslinie der homologen Punkte* D_1 *und* E *in einem Kurvenpunkte geschnitten.* —

Um also zu einem Punkte E den homologen Punkt E_1 zu finden, können wir statt von A und A_1, wie bisher, auch von irgend zwei andern homologen Punkten D und D_1 ausgehen. — Wenden wir den eben gefundenen Satz an, um zum Punkte X_1 den homologen X zu finden, so mufs, da $D X_1$ (Fig. 131) die Kurve in E_1 schneidet, die Gerade $D_1 X$ durch E_1 gehen, d. h. $D_1 E_1$ schneidet p in X. Den drei beliebigen Punkten $E_1 X_1 D$, die in einer Gerade liegen, entsprechen mithin die Ecken des perspektiv liegenden Dreiecks $E X D_1$.

4. Lehrsatz: *Sind eine gerade und eine krumme Punktreihe involutorisch aufeinander bezogen, so sind je drei Punkten, die in einer Gerade liegen, die Ecken eines perspektiv liegenden Dreiecks homolog.* —

5. *Die involutorische Verwandtschaft einer geraden und einer krummen Punktreihe ist durch* ein *Paar homologer Punkte bestimmt;*

denn wenn dem Punkte A_1 von p^2 der Punkt A von p zugewiesen ist, so finden wir zum Punkte B den homologen B_1, indem wir den Punkt, in welchem p^2 von $A_1 B$ geschnitten wird, aus A auf die Kurve projizieren.

208 208. **Die Involution dritter Ordnung.** Die involutorische Verwandtschaft einer geraden und einer krummen Punktreihe liefert uns ein Mittel, die Elemente eines Grundgebildes zu je dreien zu ordnen.

1. Sind p^2 und p durch die Zuweisung von A_1 und A involutorisch auf einander bezogen(207₅), so wollen wir A_1 und je zwei Punkte von p^2, die mit A in einer Gerade liegen, ein *Tripel* von p^2 nennen. Ebenso nennen wir B_1 und je zwei Punkte, die mit B in einer Gerade liegen, ein Tripel von p^2. Den Inbegriff aller so in p^2 konstruierten Tripel nennen wir eine *Involution dritter Ordnung* (und zum Unterschiede die bisher betrachtete Involution eine Involution zweiter Ordnung).

Es bilden demnach die Punktpaare, die mit A_1 ein Tripel bilden, eine krumme Involution[82] zweiter Ordnung mit dem Zentrum A; ebenso die Punktpaare, die mit B_1 ein Tripel bilden, eine krumme Involution mit dem Zentrum B u. s. w. Da die Involutionszentren AB.. in einer Gerade liegen, so sind die durch sie bestimmten krummen Involutionen komponierende einer und derselben resultierenden[159₁], der durch den Pol P von p bestimmten krummen Involution. Diese Eigenschaft benutzen wir, um unsere bisherige Konstruktion von der Kurve p^2 loszulösen und sie auf ein beliebiges einförmiges Gebilde zu übertragen (vergl. 158). Da die Gerade p durch ihren Pol P bestimmt ist und dieser durch die von ihm induzierte krumme Involution[79], so sehen wir in dem einförmigen Gebilde, in dem wir eine Involution dritter Ordnung konstruieren wollen, eine Involution zweiter Ordnung als gegeben an, die wir *die Hauptinvolution* der gesuchten Involution dritter Ordnung nennen wollen. Weisen wir dann dem beliebigen Elemente A eine Involution zu, die nur der Bedingung genügt, eine komponierende der Hauptinvolution zu sein, so ist die Involution dritter Ordnung bestimmt. Da eine komponierende der Hauptinvolution durch *ein* Punktpaar bestimmt ist[166₁] und dies mit dem Elemente A ein Tripel bildet, so haben wir den

2. Lehrsatz: *Eine Involution dritter Ordnung ist durch ihre Hauptinvolution und ein Tripel bestimmt.*

209. **Darstellung einer Involution dritter Ordnung.** 209
Ist die Hauptinvolution durch den Wurf $D_1 E_1 . F_1 G_1$ und ein Tripel durch die Elemente $A_1 B_1 C_1$ gegeben, so ist die Involution dritter Ordnung bestimmt[208₂]. Sie kann also durch sieben Elemente dargestellt werden. Durch passende Wahl läſst sich die Zahl auf vier verringern. Ist B_1 das dem Elemente A_1 in der Hauptinvolution zugeordnete, und C_1 das Element, das A_1 und B_1 zu einem Tripel ergänzt, D_1 aber das Element, das C_1 in der Hauptinvolution homolog ist, so ist die Hauptinvolution durch $A_1 B_1 . C_1 D_1$ und das Tripel durch $A_1 B_1 C_1$ dargestellt. Es läſst sich daher jede Involution dritter Ordnung auch durch vier Elemente darstellen.

Für eine Kurve p^2 würden wir also eine Involution dritter Ordnung vermittelst des Kurvenvierecks $A_1 B_1 C_1 D_1$ darstellen können. Der eine Diagonalpunkt P, der Schnittpunkt von $A_1 B_1$ und $C_1 D_1$, ist das Zentrum der Hauptinvolution; der zweite Diagonalpunkt, der Schnittpunkt A von $A_1 D_1$ und $B_1 C_1$, ist das Zentrum der dem Punkte A_1 zugewiesenen Involution und der dritte Diagonalpunkt, der Schnittpunkt B von $A_1 C_1$ und $B_1 D_1$, das dem Punkte B_1 zugewiesene Zentrum B; die Verbindungslinie AB ist demnach die Gerade p.

210 210. **Ordnungselement und Ordnungsinvolution.** Weil sich alle Sätze über projektive Verwandtschaft durch Projektion von einem einförmigen Gebilde auf jedes andere übertragen lassen (vergl. 160 A), so werden wir unsern folgenden Betrachtungen als Träger immer eine Kurve p^2 zu Grunde legen. Für diesen Fall ist[207,5] die Involution dritter Ordnung konstruiert, wenn wir p und zu einem Punkte A_1 von p^2 den homologen A von p gezeichnet haben. — Hat ein Punkt K_1 von p^2 die besondere Lage, daſs seine Tangente durch den homologen Punkt K von p geht, so giebt es unter den Punktpaaren $B_1 C_1$, die mit K in einer Gerade liegen, also mit K_1 ein Tripel[208,1] bilden, eins von besonderer Wichtigkeit. Fällt nämlich B_1 in K_1, so fällt auch C_1 in K_1. Es giebt daher in diesem Falle ein Tripel, dessen Elemente in A_1 zusammenfallen.

1. Definition: *Ein Tripel, dessen Elemente zusammenfallen, heiſst ein Ordnungselement der Involution dritter Ordnung.* —

Die involutorische Beziehung der Kurve p^2 und der Gerade p sei durch die homologen Punkte A und A_1 bestimmt. Ist nun x eine beliebige Tangente von p^2, so wird x von dem krummen Büschel der Tangenten in den Kurvenpunkten $A_1 B_1 \ldots$ in einer projektiven Punktreihe[71,5] $\mathsf{A}\,\mathsf{B} \ldots$ geschnitten, die auch projektiv ist[71,6] zu der geraden Punktreihe $AB \ldots$ Giebt es nun drei Punkte $K_1 \mathsf{K} K$, die in einer Gerade liegen, so ist, weil $K_1 \mathsf{K}$ die Tangente in K_1 ist, K_1 ein Ordnungspunkt. Da die Verbindungslinien $A\mathsf{A}$, $B\mathsf{B} \ldots$ eine Kurve x^2 umhüllen[42], diese aber mit p^2 die Tangente x gemeinsam hat, so haben p^2 und x^2 noch eine Tangente k und eine konjugierte Strahleninvolution J^2 gemeinsam[191,2]. Der Punkt K_1, in dem k die Kurve p^2 berührt, ist ein Ordnungspunkt, und wenn die gemeinsame Strahleninvolution J^2 die Ordnungsstrahlen l und m hat, so sind die Punkte L_1 und M_1, in denen l und m die Kurve p^2 berühren, ebenfalls Ordnungspunkte. Wir nennen daher die Strahleninvolution J^2 die *Ordnungsinvolution* unserer Involution dritter Ordnung.

2. *Eine Involution dritter Ordnung hat stets ein Ordnungselement und eine Ordnungsinvolution zweiter Ordnung.*

Zusatz. Als besonderer Fall von 208_2 ergiebt sich: z

Eine Involution dritter Ordnung ist durch ihre Hauptinvolution und ein Ordnungselement bestimmt.

211. **Bestimmungsstücke einer Involution dritter Ordnung.** 211

1. *Eine Involution dritter Ordnung ist bestimmt durch ein Tripel und durch die einem beliebigen Elemente zugewiesene Involution zweiter Ordnung.*

Ist dem Punkte A_1 (Fig. 132) von p^2 die krumme Involution $[A]^{(159)}$ zugewiesen, und ist aufserdem das Tripel $B_1 B_2 B_3$ gegeben, so kann man die dem Punkte B_1 zuzuweisende Involution B^2 finden. Entspricht nämlich in der Involution $[A]$ dem Punkte B_1 der Punkt X_1, so ist der Schnittpunkt B von $A_1 X_1$ und $B_2 B_3$ das Zentrum der dem Punkte B_1 zuzuweisenden Involution. Da der Pol der Verbindungslinie AB die Hauptinvolution liefert, so ist die Involution dritter Ordnung bestimmt$^{(208_2)}$. —

2. *Eine Involution dritter Ordnung ist durch drei Tripel bestimmt.*

Die drei gegebenen Tripel seien $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$. Wir stellen uns zunächst nur die Aufgabe, eine Involution dritter Ordnung herzustellen, von der $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ (Fig. 132) zwei Tripel sind. Wir können dann noch als Zentrum der dem Punkte A_1 zuzuweisenden Involution zweiter Ordnung einen beliebigen Punkt A von $A_2 A_3$ wählen. Dadurch ist, wie wir eben sahen, die dem Punkte B_1 zuzuweisende Involution B bestimmt: Wir haben den Punkt X_1, in welchem AB_1 die Kurve schneidet, aus A_1 auf $B_2 B_3$ zu projizieren; die so gewonnene Gerade $AB = x$ bestimmt mit p^2 eine Involution dritter Ordnung, von der $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ zwei Tripel sind. Bewegt sich nun A in $A_2 A_3$, so ist[37 A]

$$A[B_1] \barwedge X_1[A_1] \barwedge B;$$

B beschreibt also die projektive Punktreihe $B_2 B_3$, die Gerade $AB = x$ also einen krummen Strahlenbüschel x^2.

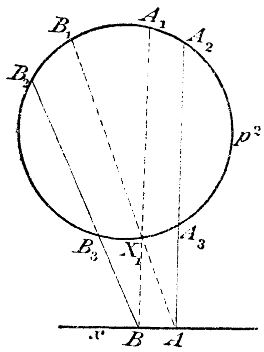

Fig. 132.

Fällt A, und mithin auch X_1, in A_2, so fällt x in $A_1 A_2$; fällt A in A_3, so fällt x in $A_1 A_3$. Da aufserdem der Träger $A_2 A_3$ der von A beschriebenen Punktreihe ein Strahl des Büschels ist, so sind die Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ Strahlen des Büschels x^2.

Wiederholen wir unsere Betrachtungen, indem wir von den beiden Tripeln $A_1 A_2 A_3$ und $C_1 C_2 C_3$ ausgehen, so ergiebt sich, dafs der von $AC = y$ beschriebene Strahlenbüschel zweiter Ordnung y^2 ebenfalls die Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ enthält. Die beiden Strahlenbüschel x^2 und y^2 haben also noch einen vierten Strahl p gemeinsam[101,1]; da in diesem x und y zusammenfallen, so erhalten wir durch p eine Involution dritter Ordnung, von welcher $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$ drei Tripel sind. —

3. *Eine Involution dritter Ordnung ist durch drei Ordnungselemente bestimmt.*

Fallen die Punkte jedes der gegebenen Tripel zusammen, mit andern Worten, sind uns die Ordnungspunkte[210,1] $A_1 B_1 C_1$ gegeben, so läfst sich die gesuchte Gerade p und mit ihr die Involution dritter Ordnung bequem konstruieren. In diesem Falle sind die Verbindungslinien $A_2 A_3$, $B_2 B_3$, $C_2 C_3$ die Tangenten in $A_1 B_1 C_1$. Bezeichnen wir die Punkte, in denen diese Tangenten von den Gegenseiten des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ geschnitten werden, durch $\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma$, so liegen $\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma$ in der Pascalschen Gerade p[57]. Fällt A bei seiner Bewegung auf $A_1\mathsf{A}$ in A, so fällt X_1 in C_1 und B in B, die Pascalsche Gerade $\mathsf{A}\mathsf{B} = p$ gehört also dem von $AB = x$ beschriebenen krummen Büschel an. Ebenso zeigt sich, dafs sie dem von $AC = y$ beschriebenen Büschel y^2 angehört, also die gesuchte gemeinsame Tangente von x^2 und y^2 ist. — Aus der Konstruktion ergiebt sich noch:

4. *Die drei Ordnungselemente bilden ein Tripel der Involution dritter Ordnung.*

212. Konstruktion der Ordnungsinvolution. 212

Aufgabe: *In einer Kurve zweiter Ordnung ist eine Involution dritter Ordnung durch ihre Hauptinvolution und ein Ordnungselement gegeben*[210 Z]*; man soll die Ordnungsinvolution konstruieren.*

Ist das Zentrum der in der Kurve gegebenen Hauptinvolution P, so müssen die Zentren der den Punkten von p^2 zugewiesenen Involutionen zweiter Ordnung in der Polare p von P liegen[208]. Ist der gegebene Ordnungspunkt K_1, so mufs die Tangente in K_1 die Gerade p in dem zugeordneten Involutionszentrum K schneiden. Die gesuchte Ordnungsinvolution finden wir nun durch eine Wiederholung der Betrachtungen von Nr. 210_2. Während wir aber dort uns mit dem Beweise begnügen mufsten, dafs ein Ordnungspunkt und eine Ordnungsinvolution existiert, können wir jetzt, wo uns ein Ordnungspunkt K_1 gegeben ist, die gesuchte Ordnungsinvolution wirklich zeichnen.

Die involutorische Verwandtschaft zwischen p^2 und p ist durch die Zuweisung von K_1 und K bestimmt[207_5]. Wir wählen also eine beliebige Tangente x von p^2 und konstruieren in dieser wieder wie in Nr. 210 eine zu den Punkten $A_1\,B_1\,C_1$ .. von p^2 und daher auch zu den Punkten $A\,B\,C$.. von p projektive Punktreihe $\mathsf{A\,B\,\Gamma}$... Durch passende Wahl der Tangente x nun läfst sich diese Konstruktion sehr vereinfachen. — Wir wählen als Tangente x die zweite von K an p^2 gehende Tangente, deren Berührungspunkt L_1 sein möge. Dadurch wird die projektive Beziehung von p und x zur perspektiven; denn in dem Schnittpunkte K von p und x sind zwei homologe Punkte der Punktreihen x und p vereinigt. Zeichnen wir[207_3] den dem Punkte L_1 (Fig. 133) in p homologen Punkt, so erhalten wir den Punkt L, in dem p von $K_1\,L_1$, der Polare von K[86 Z_1], geschnitten wird. Weil die Verwandtschaft eine perspektive ist, der krumme Strahlenbüschel x^2 also in zwei gerade Strahlenbüschel zerfällt, so mufs das Zentrum der gesuchten Ordnungsinvolution auf $L\,L_1$ liegen; zu seiner Auffindung braucht also nur noch ein Paar homologer Punkte von x und p bestimmt zu werden. Ist A_1 ein beliebiger Punkt von p^2, so finden wir[207_3] den zugeordneten A von p vermittelst des Punktpaares $K_1 K$ (oder des Punktpaares $L_1 L$), indem wir A_1 mit K verbinden und den zweiten Schnittpunkt B_1 dieser Verbindungslinie und p^2 aus K_1 auf p projizieren. Ziehen wir also noch die Tangente in A_1, die $x = K L_1$ in A schneidet, so sind A und A zwei homologe Punkte von x und p, ihre Verbindungslinie schneidet daher $L_1 L$ in dem Zentrum J der gesuchten Ordnungsinvolution.

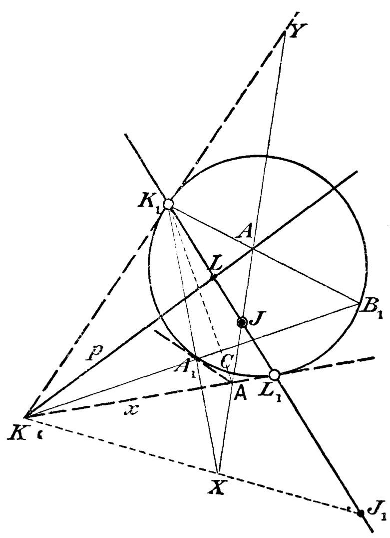

Fig. 133.

Zusatz. Ziehen wir noch die Verbindungslinie $K_1 \mathsf{A}$ (Fig. 133) und nennen ihren zweiten Schnittpunkt mit der Kurve C, so sind[70_5] $K_1 C . L_1 A_1$ vier harmonische Kurvenpunkte, folglich $K_1 (K_1 C . L_1 A_1)$ vier harmonische Strahlen. Diese schneiden die Gerade $A \mathsf{A}$ in dem harmonischen Wurfe $Y \mathsf{A} . J X$. Projizieren wir diesen wieder aus K auf $K_1 L_1$, so ergiebt sich, dafs $K_1 L_1 . J J_1$ vier harmonische Punkte sind. — Weil ferner $K_1 L_1 . A_1 B_1$ vier harmonische Punkte sind[70_5], so sind $K_1 (K_1 L_1 . A_1 B_1)$ vier harmonische Strahlen und folglich $Y J . X A$ vier harmonische Punkte. Projizieren wir diese aus K auf $K_1 L_1$, so ergiebt sich, dafs $K_1 J . J_1 L$ ein harmonischer Wurf ist.

Da wir in den beiden harmonischen Würfen $K_1 L_1 . J J_1$ und $K_1 J . L J_1$ die drei Punkte $K_1 L_1 L$ als gegeben ansehen können, so haben wir durch unsere Konstruktion die Aufgabe gelöst:

1. Gegeben die drei Punkte $K_1 L_1 L$; man soll zwei Punkte J und J_1 so bestimmen, dafs $K_1 L_1 . J J_1$ und $K_1 J . L J_1$ zwei harmonische Würfe sind. —

Da diese Aufgabe (vgl. auch *von Staudt:* Beiträge zur Geometrie der Lage, Nr. 297) bei der Aufstellung eines Polarfeldes dritter Ordnung von Nutzen sein wird, so mag hier noch eine Bemerkung angeknüpft werden, die sich aus unserer Konstruktion ergiebt.

Halten wir die Punkte K_1 und L_1 fest, während L sich auf $K_1 L_1$ bewegt, so können wir für jede Lage von L zur Konstruktion von J denselben Punkt A_1, den wir beliebig angenommen hatten, benutzen; es sind dann auch noch die Punkte A und B_1 fest. Während L sich in $K_1 L_1$ bewegt, bewegt sich A in $K_1 B_1$, und X in $K_1 A_1$, so dafs wir haben[37 A]:

$$L\,[K] \overline{\overline{\wedge}} A\,[\mathsf{A}] \overline{\overline{\wedge}} X\,[K] \overline{\overline{\wedge}} J_1 \text{ und } J\,[\mathsf{A}] \overline{\wedge} X,$$

folglich

$$J \overline{\wedge} J_1;$$

in Worten:

2. Die Punktreihen J und J_1 sind projektiv auf die Punktreihe L bezogen. —

Schliefslich mag noch bemerkt werden, dafs der Satz eine Verallgemeinerung des Pascalschen für das Kurvendreieck[57] ist. Wenn nämlich J ein hyperbolischer Punkt[105_2] ist, dessen Tangenten die Kurve in M_1 und N_1 berühren, so ist die Gerade p die Pascalsche Gerade des Kurvendreiecks $K_1 M_1 N_1$.

213. **Konstruktion von Involutionen dritter Ordnung durch einen Büschel von Polarfeldern zweiter Ordnung.** Die Pole einer beliebigen Gerade e für die Polarfelder eines Büschels liegen in einer Kurve e_1^2, die wir[195] die Polkurve der Gerade e genannt haben. In dieser Polkurve e_1^2 liegen auch die Punkte E_1, die den Punkten E von e absolut konjugiert sind, und zwar sind die Punkte E_1 projektiv auf die Punkte E bezogen[198]. — Sind den Punkten $C_1\,\Delta_1\,G_2$ (Fig. 134), in denen e die Träger $g\,h\,u$ schneidet, die Punkte $C\,\Delta\,H_2$ homolog, so finden wir den dem Punkte E von e absolut konjugierten Punkt E_1[197_3], indem wir den Punkt X, in dem $C\Delta$ von $E\,U$ geschnitten wird, aus G_2 auf g und h und die erhaltenen Punkte D und Γ aus Δ und C projizieren. Bewegt sich nun der Punkt E auf e, X also auf $C\Delta$, D auf g und Γ auf h, so sehen wir: Wenn E der Reihe nach in C_1, Δ_1 und den Punkt A_1 fällt, in dem $C_1\,\Delta_1$ von $C\Delta$ ge-

schnitten wird, so fällt E_1 der Reihe nach in C, Γ und den Punkt A, in dem sich $C\Delta_1$ und ΔC_1 schneiden[197 Z]. Die projektive Verwandtschaft zwischen der geraden Punktreihe E und der krummen Punktreihe E_1 ist also bestimmt durch $C_1 \Delta_1 \mathsf{A}_1 \barwedge C \Delta \mathsf{A}$. Da das Dreieck $C \Delta \mathsf{A}$ perspektiv liegt zu den Punkten $C_1 \Delta_1 \mathsf{A}_1$, so sind die beiden projektiven Punktreihen in involutorischer Lage[207_1].

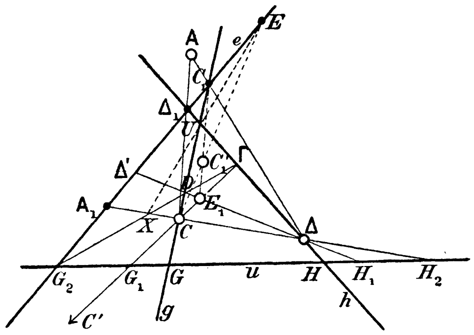

Fig. 134.

1. Jede gerade Punktreihe e ist involutorisch auf ihre Polkurve $e_1{}^2$ bezogen, wenn man jedem Punkte E von e den ihm absolut konjugierten Punkt E_1 von $e_1{}^2$ zuordnet.

1. Jeder gerade Strahlenbüschel E ist involutorisch auf seinen Polarenbüschel $E_1{}^2$ bezogen, wenn man jedem Strahle e von E den ihm absolut konjugierten Strahl e_1 von $E_1{}^2$ zuordnet.

Daraus folgt[207_3]:

2. *Jede Gerade, welche einen beliebigen Punkt* A *von* e *mit einem beliebigen Punkte* B_1 *von* $\mathrm{e}_1{}^2$ *verbindet, wird von der Verbindungslinie der homologen Punkte* A_1 *und* B *in einem Punkte der Polkurve* $\mathrm{e}_1{}^2$ *geschnitten.*

2. *Jeder Punkt, in welchem ein beliebiger Strahl* a *von* E *einen beliebigen Strahl* b_1 *von* $\mathrm{E}_1{}^2$ *schneidet, liegt mit dem Schnittpunkte der homologen Strahlen* a_1 *und* b *in einem Strahle des Polarenbüschels* $\mathrm{E}_1{}^2$.

Diese Bemerkung wollen wir noch in einer etwas andern Form aussprechen, indem wir sie aus dem Hesseschen Satz[96] ableiten und dadurch auf die Bedeutung dieses Satzes für die Involution dritter Ordnung hinweisen. Betrachten wir die absolut konjugierten Punkte $A A_1$ und $B B_1$ als zwei Paar Gegenecken eines Vierseits, so ergiebt sich, daſs die Ecke, in der sich die Seiten $A B$ und $A_1 B_1$ des Vierseits schneiden, absolut konjugiert ist ihrer Gegenecke, in der sich $A B_1$ und $A_1 B$ schneiden:

3. Sind $A A_1$ und $B B_1$ zwei Paar absolut konjugierte Punkte, so ist auch der Schnittpunkt von $A B$ und $A_1 B_1$ dem Schnittpunkte von $A B_1$ und $A_1 B$ absolut konjugiert. —

3. Sind $a a_1$ und $b b_1$ zwei Paar absolut konjugierte Geraden, so ist auch die Verbindungslinie von $a b$ und $a_1 b_1$ der Verbindungslinie von $a b_1$ und $a_1 b$ absolut konjugiert. —

Ferner ergiebt sich[208₁]:

4. *Ordnet man jedem Punkte* E_1 *von* $\mathrm{e}_1{}^2$ *die krumme Punktinvolution zu, die den absolut konjugierten Punkt* E *von* e *als Involutionszentrum hat, so ist in* $\mathrm{e}_1{}^2$ *eine Involution dritter Ordnung konstruiert.* —

4. *Ordnet man jedem Strahle* e_1 *von* $\mathrm{E}_1{}^2$ *die krumme Strahleninvolution zu, die die absolut konjugierte Gerade* e *als Involutionsachse hat, so ist in* $\mathrm{E}_1{}^2$ *eine Involution dritter Ordnung konstruiert.* —

Durch die krumme Involution dritter Ordnung in $e_1{}^2$ ist auch eine gerade Involution dritter Ordnung in e bestimmt; denn die beiden Punktreihen e und $e_1{}^2$ sind projektiv aufeinander bezogen. Diese gerade Punktinvolution dritter Ordnung von e wollen wir zeichnen. — Weil zwei Paar Gegenseiten des Vierecks $C \Delta D \Gamma$ (Fig. 134) die Diagonale u in homologen Punktpaaren $G H$ und $G_2 H_2$ der diagonalen Involution schneiden, so schneiden auch die Gegenseiten $C \Gamma$ und ΔD die Diagonale u in zwei homologen Punkten G_1 und H_1[64 Z]. Für das Polarfeld $(G G_1)$ ist daher H_1 der Pol von h[192₄], ferner $C G_1$ die Polare von C_1 und ΔH_1 die Polare von Δ_1, der Schnittpunkt E_1 also der Pol von e. Für das Polarfeld $(G G_1)$ ist daher dem Punkte C_1 der Punkt C' konjugiert, in dem e von $C G_1$ geschnitten wird, und dem Punkte Δ_1 der Punkt Δ', in dem e von ΔH_1 geschnitten wird. — Verbinden wir nun den Punkt E von e mit dem Punkte C der Polkurve $e_1{}^2$, so wird diese Verbindungslinie, wie wir eben gesehen haben, von der Verbindungslinie der homologen Punkte E_1 und C_1 in dem Punkte C_1' der Polkurve $e_1{}^2$ geschnitten, der dem Punkte C' absolut konjugiert ist. Den Punkten C und C_1' also, die mit E in einer Gerade liegen, sind in e zwei Punkte C_1 und C' absolut konjugiert, die einander homolog sind für das Polarfeld $(G\,G_1)$, d. h. für das Polarfeld, für welches E_1 der Pol von e ist. Ebenso würde sich ergeben, wenn wir den zweiten Schnittpunkt von $E\Delta$ mit der Polkurve durch Δ_1' bezeichneten, dafs den Punkten Δ und Δ_1' in e die beiden Punkte Δ_1 und Δ' absolut konjugiert sind, also zwei Punkte, die ebenfalls für das Polarfeld $(G\,G_1)$ einander konjugiert sind:

5. *Ordnet man jedem Punkte* E *von* e *die Involution zu, welche dem Polarfelde des Büschels konjugiert ist, für welches der dem Punkte* E *absolut konjugierte Punkt* E_1 *der Pol von* e *ist, so erhält man in* e *eine gerade Punktinvolution dritter Ordnung.*

5. *Ordnet man jedem Strahle* e *von* E *die Involution zu, welche dem Polarfelde der Schar konjugiert ist, für welches der dem Strahle* e *absolut konjugierte Strahl* e_1 *die Polare von* E *ist, so erhält man in* E *eine gerade Strahleninvolution dritter Ordnung.*

§ 19. Die adjungierten Involutionen.

214 214. **Erweiterung des Begriffs der konjugierten Punkte.** Es seien e^2 und f^2 irgend zwei einem Polarfelde k^2 konjugierte Involutionen; fassen wir diese Involutionen als zwei Gegenseiten(134) auf, so erzeugen sie in jeder Gerade a eine Hauptinvolution. Hat diese Hauptinvolution, die dem Polarfelde k^2 adjungiert ist(194₃), zwei Ordnungspunkte, so sind diese zwei einander für k^2 konjugierte Punkte(161₁).

Diese Bemerkung führt uns dazu, in der Hauptinvolution eine ähnliche Erweiterung des Begriffs der konjugierten Punkte zu sehen, wie wir sie in Nr. 93 durch die konjugierte Involution für den Begriff der Schnittpunkte einer Gerade mit der Kurve eingeführt haben. Diese Erweiterung hatte den grofsen Vorteil, dafs unsere Beweise dieselben waren für die Geraden, die die Kurve schnitten, und für solche, die sie nicht schnitten. Derselbe Vorteil, also die allgemeine Gültigkeit der Sätze, ergiebt sich auch jetzt, wenn wir zwei konjugierte Punkte durch eine Involution ersetzen. Thatsächlich haben wir von dieser Erweiterung des Begriffs der konjugierten Punkte bereits mehrfach Gebrauch gemacht, nämlich überall da, wo wir von der adjungierten Involution gesprochen haben. An dieser Stelle sollen nun die bereits gemachten Bemerkungen im Zusammenhange wiederholt und durch einige bisher nicht ausgesprochene Sätze ergänzt werden.

1. Definition: *Jede resultierende (oder, was dasselbe ist: jede komponierende) einer konjugierten Involution heifst dem Polarfelde adjungiert*(168 Z₁).

2. *Die Ordnungselemente einer adjungierten Involution sind dem Polarfelde konjugiert*(161₁).

3. Die resultierende aus zwei einem Polarfelde adjungierten Involutionen, die denselben Träger haben, ist dem Polarfelde konjugiert(162).

4. Sind zwei Involutionen einem Polarfelde konjugiert, so ist jede ihnen zugeordnete(134) Hauptinvolution dem Polarfelde adjungiert(194₃).

5. *Sind zwei Involutionen einem Polarfelde konjugiert, so ist ihre diagonale Involution dem Polarfelde adjungiert*(194₄).

215. **Zusatz zum Lehrsatz des Desargues.** Die beiden konjugierten Involutionen e^2 und f^2, die ein Polarfeld k^2 in zwei beliebigen Trägern e und f induziert, wollen wir im folgenden der Kürze wegen ein *Sehnenpaar* des Polarfeldes nennen. (Für die konjugierten Strahleninvolutionen E^2 und F^2, die den Punktinvolutionen e^2 und f^2 dual(7) gegenüberstehen, steht kein dem Worte Sehne entsprechendes zur Verfügung; wir müssen uns deswegen mit dem Worte „Punktpaar" behelfen.) Fassen wir wieder(214) dieses Sehnenpaar (ef) als ein Paar Gegenseiten im Sinne von Nr. 134 auf, so induzieren die Gegenseiten (ef) in jeder Gerade a eine Hauptinvolution. Der Satz, der den Zusammenhang zwischen dieser Hauptinvolution und der dem Polarfelde konjugierten Involution von a ausspricht, ist der Lehrsatz des Desargues(194₃), den wir an dieser Stelle mit etwas veränderten Worten wiederholen: 215

1. Jedes Sehnenpaar eines Polarfeldes erzeugt in einer beliebigen Gerade eine Hauptpunktinvolution, die dem Polarfelde adjungiert ist.

1. Jedes „Punktpaar" eines Polarfeldes erzeugt in einem beliebigen Punkte eine Hauptstrahleninvolution, die dem Polarfelde adjungiert ist.

Wird die Gerade a von den Sehnen e und f in den Punkten E und F geschnitten, so sind die Punkte E und F einander homolog in der Hauptinvolution[134], welche e^2 und f^2 in a bestimmen. Da nun diese Hauptinvolution nach dem eben wiederholten Satze von Desargues eine komponierende der konjugierten Involution von a ist, so ist sie durch das Punktpaar EF bestimmt[166_1]. Je zwei Sehnen des Polarfeldes also, die a in denselben Punkten E und F schneiden wie die beiden Sehnen e und f, von denen wir ausgingen, erzeugen in a dieselbe Hauptinvolution wie e^2 und f^2. Daraus ergiebt sich der Zusatz zum Desarguischen Satze:

2. *Zwei Sehnenpaare eines Polarfeldes erzeugen in einer beliebigen Gerade* a *dieselbe Hauptpunktinvolution, wenn die Träger des einen Paares die Gerade* a *in denselben Punkten schneiden, wie die Träger des andern.*

2. *Zwei „Punktpaare“ eines Polarfeldes erzeugen in einem beliebigen Punkte* A *dieselbe Hauptstrahleninvolution, wenn die Mittelpunkte des einen Paares aus* A *durch dieselben Strahlen projiziert werden wie die Mittelpunkte des andern.*

Zusatz. Sind die beiden Sehnen hyperbolisch (haben die Involutionen e^2 und f^2 die Ordnungspunkte KK_1 und LL_1), so bestimmen sie ein Kurvenviereck KK_1LL_1, dessen Gegenseiten die Gerade a in homologen Punkten der Hauptinvolution schneiden[134 A]. Für diesen besondern Fall heifst also unser Satz:

Die Gegenseiten zweier Kurvenvierecke schneiden eine Gerade a in Punktpaaren einer und derselben Involution, wenn zwei Gegenseiten des einen Vierecks die Gerade a in denselben beiden Punkten schneiden wie zwei Gegenseiten des andern Vierecks. —

Die Gegenecken zweier Kurvenvierseite werden aus einem Punkte A durch Strahlenpaare einer und derselben Involution projiziert, wenn zwei Gegenecken des einen Vierseits aus dem Punkte A durch dieselben beiden Strahlen projiziert werden wie zwei Gegenecken des andern Vierseits. —

Schneidet die Vierecksseite KL die Gerade a in dem Punkte E_1, der dem Punkte E, in dem a von $KK_1 = e$ geschnitten wird, in der konjugierten Involution von a

homolog ist, so mufs(215₁) die Gegenseite $K_1 L_1$ die Gerade a in dem Punkte F_1 schneiden(166₄), der dem Schnittpunkte F von $L L_1 = f$ und a in der konjugierten Involution von a homolog ist. Wir kommen also durch diese Spezialisierung auf den in Nr. 99_4 bewiesenen Lehrsatz zurück. Da wir auf diesen Lehrsatz die Analysis unserer Fundamentalkonstruktion(100) stützten, so zeigt sich, welcher Zusammenhang zwischen unserer Fundamentalkonstruktion und dem Lehrsatz des Desargues besteht.

216. Bestimmung des Polarfeldes durch zwei konjugierte und eine adjungierte Involution. 216

Lehrsatz: *Durch zwei konjugierte und eine adjungierte Involution ist ein Polarfeld bestimmt.*

Beweis: Die beiden konjugierten Punktinvolutionen seien g^2 und h^2, die adjungierte Involution a^2. Der durch $(g\,h)$ bestimmte Büschel(192₁) induziert in a eine Hauptinvolution. Diese Hauptinvolution können wir mit der in a gegebenen adjungierten Involution zu einer resultierenden zusammensetzen(162). Ist in dieser resultierenden Involution dem Punkte A, in dem die Diagonale u von der Gerade a geschnitten wird, der Punkt A' von a homolog, so ist die Gerade $A' U$, welche den Punkt A' mit dem Diagonalpunkte U verbindet, die Polare(192₂) von A und schneidet die Diagonale in dem dem Punkte A konjugierten Punkte A_1. Durch das Punktpaar $A A_1$ wird eine komponierende der diagonalen Involution bestimmt(166₁). Entspricht in dieser dem Punkte G der Punkt G_1, so ist das durch die Zuweisung $(G G_1)$ bestimmte(192₃) Polarfeld das gesuchte.

217. Verallgemeinerung des Hesseschen Satzes. 217
Wir betrachten die Polarfelder, denen zwei gegebene Punktinvolutionen g^2 und h^2 *adjungiert* (nicht, wie bisher, konjugiert) sind. Jedes dieser Polarfelder k^2 erzeugt in den Trägern g und h konjugierte Involutionen, die nach der Definition(214₁) komponierende der in g und h gegebenen adjungierten Involutionen sind. Entspricht in den gegebenen adjungierten Involutionen dem Schnittpunkte U (Fig. 135) der Träger in g der Punkt G und in h der Punkt H, so dafs $G H$ die Diagonale u der gegebenen Involutionen ist, so sind für das beliebige Polarfeld k^2, für welches dem Punkte U in g^2 der Punkt C und in h^2 der Punkt Γ

konjugiert sei, auch $G C_1$ und $H \Gamma_1$ konjugierte Punktpaare[166_4]; das Polarfeld k^2 gehört also einem Büschel an, der bestimmt ist durch die konjugierte Involution $U C . G C_1$ in g und durch die konjugierte Involution $U \Gamma . H \Gamma_1$ in h. Für alle Polarfelder dieses Büschels ist $C \Gamma$ die Polare des Punktes U[192_2] und die in $G H$ durch diesen Büschel bestimmte Hauptinvolution ist gegeben[134] durch das Punktpaar $G H$ und die Punkte A und B, in denen $G H$ von der gemeinsamen Polare $C \Gamma$ und der $G H$ zugeordneten Gerade $C_1 \Gamma_1$ geschnitten wird. Diese Hauptinvolution ist, wie wir sehen, identisch mit der diagonalen Involution[135_2], die den in g und h gegebenen adjungierten Involutionen zugeordnet ist. Da nun diese Hauptinvolution dem Polarfelde k^2 adjungiert ist[214_4], so ist, mit andern Worten, die den gegebenen Involutionen g^2 und h^2 zugeordnete diagonale Involution $GH . AB$ unserm Polarfelde adjungiert. Jedem Polarfelde also, dem die gegebenen Involutionen g^2 und h^2 adjungiert sind, ist auch die diagonale Involution u^2 adjungiert:

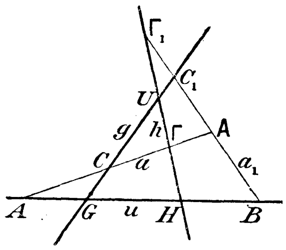

Fig. 135.

Sind zwei Involutionen einem Polarfelde adjungiert, so ist auch ihre diagonale Involution dem Polarfelde adjungiert.

z. *Zusatz.* Haben die beiden Involutionen g^2 und h^2 Ordnungspunkte, so sind diese konjugierte Punkte des Polarfeldes[214_2]. Da in diesem Falle auch die diagonale Involution Ordnungspunkte hat[137_2], so sind auch diese zwei konjugierte Punkte von k^2. Unser Satz ist also[133 A] eine Verallgemeinerung des Hesseschen[96].

218 218. **Büschel adjungierter Involutionen.** Es sei k^2 ein Polarfeld, dem die Involution g^2 konjugiert und die Involution a^2 adjungiert sei. Ist $g^2 = C C_1 . U G$, so erhalten wir durch die Zuweisung $(C U)$ die komponierende Involution $C U . C_1 G$[166_4] von g^2. Diese ist unserm Polarfelde adjungiert[214_1], weil ihm g^2 konjugiert ist. Aufserdem ist dem Polarfelde k^2 die Involution a^2 adjungiert. Mithin giebt es noch eine Involution, die k^2 adjungiert ist: die diagonale Involution von $C U . C_1 G$ und a^2[217]. Ist C der Schnitt-

punkt der Träger g und a und die adjungierte Involution $a^2 = C\Gamma \,.\, C'\Gamma'$, so ist ΓU die Diagonale der Gegenseiten $CU \,.\, C_1 G$ und a^2, und mithin der Träger der unserm Polarfelde adjungierten Involution, die bestimmt ist(134) durch das Punktpaar $U\Gamma$ und die beiden Punkte Γ_1 und H, in denen ΓU von $C'C_1$ und $\Gamma' G$ geschnitten wird. Durchläuft U den Träger g, so dafs uns durch $CU \,.\, C_1 G$ die sämtlichen komponierenden Involutionen von g^2 dargestellt werden(166₂), so beschreibt $\Gamma(U)$ einen Strahlenbüschel erster Ordnung; in jedem Strahle $\Gamma(U)$ dieses Büschels liefert die diagonale Involution eine dem Polarfelde k^2 adjungierte Involution. Da k^2 ein beliebiges der Polarfelder ist, denen g^2 konjugiert und a^2 adjungiert ist, so haben wir den

Lehrsatz: Alle Polarfelder, denen eine gegebene Punktinvolution g^2 konjugiert und eine zweite gegebene Punktinvolution a^2 adjungiert ist, haben noch unendlich viele adjungierte Punktinvolutionen gemeinsam. Die Träger dieser adjungierten Punktinvolutionen bilden einen Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt Γ derjenige Punkt von a ist, der dem Schnittpunkte C der Träger g und a in der adjungierten Punktinvolution a^2 homolog ist.

Lehrsatz: Alle Polarfelder, denen eine gegebene Strahleninvolution G^2 konjugiert und eine zweite gegebene Strahleninvolution A^2 adjungiert ist, haben noch unendlich viele adjungierte Strahleninvolutionen gemeinsam. Die Mittelpunkte dieser adjungierten Strahleninvolutionen bilden eine Punktreihe erster Ordnung, deren Träger γ derjenige Strahl von A ist, der der Verbindungslinie c der Mittelpunkte G und A in der adjungierten Strahleninvolution A^2 homolog ist.

219. **Der Träger der zweiten konjugierten Involution.** Ein Polarfeld k^2 induziert in jeder Gerade a eine konjugierte Involution(93); ein zweites Polarfeld $k_1{}^2$ erzeugt in der Gerade a ebenfalls eine konjugierte Involution; die aus diesen beiden konjugierten Involutionen resultierende ist den beiden Polarfeldern k^2 und $k_1{}^2$ adjungiert(214₁). Wenn die beiden konjugierten Involutionen von a nicht identisch sind, so ist die resultierende immer bestimmt(162). 219

1. Lehrsatz: Durch zwei Polarfelder ist in jeder Ge-

1. Lehrsatz: Durch zwei Polarfelder ist in jedem

rade, die nicht der Träger einer beiden Feldern gemeinsam konjugierten Punktinvolution ist, eine den beiden Feldern gemeinsam adjungierte Punktinvolution bestimmt.

Punkte, der nicht der Mittelpunkt einer beiden Feldern gemeinsam konjugierten Strahleninvolution ist, eine den beiden Feldern gemeinsam adjungierte Strahleninvolution bestimmt.

Wir betrachten jetzt wieder, wie in Nr. 218, solche Polarfelder, die eine konjugierte Involution g^2 und eine adjungierte Involution a^2 gemeinsam haben. Sind k^2 und $k_1{}^2$ irgend zwei dieser Felder, so müssen sie, weil sie die konjugierte Involution g^2 gemeinsam haben, noch eine zweite Involution h^2 gemeinsam haben(191₁). Sie gehören also dem durch die Gegenseiten $(g\,h)$ bestimmten Büschel von Polarfeldern an. Da jede Hauptinvolution des Büschels(194₂) den beiden Polarfeldern k^2 und $k_1{}^2$ adjungiert ist, so mufs die Hauptinvolution von a mit der gegebenen adjungierten Involution a^2 zusammenfallen; weil aber jede Gerade von g und h in zwei homologen Punkten ihrer Hauptinvolution geschnitten wird(134), so wird der Träger a von g und h in zwei homologen Punkten C und Γ der in a gegebenen adjungierten Involution geschnitten. Sind g^2 und a^2 gegeben, so ist damit der Schnittpunkt C von g und a und dadurch auch der dem Punkte C homologe Punkt Γ von a^2 gegeben. Die Gerade h geht also, welches Polarfeld wir auch wählen, immer durch den Punkt Γ:

2. *Haben zwei Polarfelder eine konjugierte Punktinvolution* g^2 *und eine adjungierte Punktinvolution* a^2 *gemeinsam, so geht der Träger* h *der zweiten gemeinsam konjugierten Involution durch den Punkt* Γ *von* **a**, *der dem Schnittpunkte* C *von* g *und* **a** *in der gegebenen adjungierten Involution* $\mathbf{a}^2$ *homolog ist.*

2. *Haben zwei Polarfelder eine konjugierte Strahleninvolution* G^2 *und eine adjungierte Strahleninvolution* A^2 *gemeinsam, so liegt der Mittelpunkt* H *der zweiten gemeinsam konjugierten Involution auf dem Strahle* γ *von* A, *der der Verbindungslinie* c *von* G *und* A *in der gegebenen adjungierten Involution* A^2 *homolog ist.*

220 220. **Bestimmung eines Büschels von Polarfeldern durch eine konjugierte und zwei adjungierte Involutionen.** Alle Polarfelder, die eine gemeinsam konjugierte

Involution g^2 und eine gemeinsam adjungierte Involution a^2 haben, haben nach Nr. 218 in jedem Strahle des Punktes Γ, der dem Schnittpunkt C von g und a in a^2 homolog ist, eine gemeinsam adjungierte Involution. Wählen wir unter diesen Polarfeldern diejenigen aus, die überdies noch eine zweite adjungierte Involution b^2 gemeinsam haben, so gehören diese, wie wir zeigen wollen, einem Büschel von Polarfeldern an.

Entspricht dem Schnittpunkte D (Fig. 136) der Träger g und b in der adjungierten Involution b^2 der Punkt Δ, so ist die Verbindungslinie h der Punkte Γ und Δ der Träger einer allen Polarfeldern gemeinsam konjugierten Involution. Schneidet nämlich h den Träger g in U, so ist, wie wir(218) sahen, allen Polarfeldern, die die konjugierte Involution g^2 und die adjungierte Involution a^2 gemeinsam haben, in dem Träger h eine Involution adjungiert, die bestimmt ist als diagonale Involution von $CU \,.\, C_1 G$ und a^2. Von ihr sind also U und Γ zwei homologe Punkte(135₂); in einem weitern Punktpaare wird ΓU geschnitten von den zwei Geraden, die C_1 und G mit irgend zwei homologen Punkten von a^2 verbinden(133). — Die in h liegende adjungierte Involution für die Polarfelder, denen g^2 konjugiert und b^2 adjungiert ist, ergiebt sich in ähnlicher Weise durch das Punktpaar $U\Delta$ und die beiden Punkte, in denen h von zwei Geraden geschnitten wird, die D_1 und G mit irgend zwei einander homologen Punkten von b^2 verbinden. Die Polarfelder also, denen g^2 konjugiert, und a^2 und gleichzeitig b^2 adjungiert sind, haben in h zwei adjungierte Involutionen gemeinsam; die aus diesen adjungierten Involutionen resultierende ist daher allen Polarfeldern konjugiert(214₃). Weil der Inbegriff der Polarfelder, denen zwei gegebene Involutionen konjugiert sind, ein Büschel von Polarfeldern heißt(192₁), so können wir das Ergebnis so aussprechen:

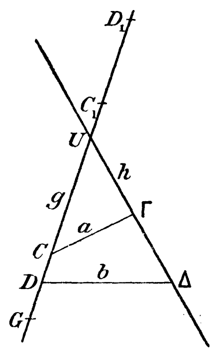

Fig. 136.

1. *Durch eine konjugierte und zwei adjungierte Punktinvolutionen ist ein Büschel von Polarfeldern bestimmt.*

1. *Durch eine konjugierte und zwei adjungierte Strahleninvolutionen ist eine Schar von Polarfeldern bestimmt.*

Hieraus folgt[216]:

2. *Durch eine konjugierte und drei adjungierte Punktinvolutionen ist ein Polarfeld bestimmt.*

2. *Durch eine konjugierte und drei adjungierte Strahleninvolutionen ist ein Polarfeld bestimmt.*

A *Anmerkung.* Für den Fall, daſs alle vier Involutionen Ordnungspunkte haben, heiſst z. B. der zweite Satz:

Durch zwei Punkte und drei Paar konjugierte Punkte ist eine krumme Punktreihe bestimmt.

Durch zwei Strahlen und drei Paar konjugierte Strahlen ist ein krummer Strahlenbüschel bestimmt.

221 221. **Schnittpunkt dreier Chordalen.** Aus Nr. 219 läſst sich ein weiterer wichtiger Satz folgern. — Haben zwei Polarfelder k^2 und $k_1{}^2$ eine gemeinsam konjugierte Punktinvolution g^2, so haben sie noch eine zweite gemeinsam konjugierte Punktinvolution h^2[191_1]; k^2 und $k_1{}^2$ gehören also dem durch die Gegenseiten $(g\,h)$ bestimmten Büschel von Polarfeldern an. Ist $k_2{}^2$ irgend ein drittes Polarfeld, das dem Büschel $(g\,h)$ *nicht* angehört, dem aber g^2 konjugiert ist, so haben k^2 und $k_2{}^2$ ebenfalls noch eine zweite konjugierte Punktinvolution a^2 gemeinsam. Schneidet a die Träger g und h in C und Γ, so muſs die Involution a^2, weil sie dem Polarfelde k^2 konjugiert ist, eine komponierende der in $C\Gamma = a$ durch den Büschel $(g\,h)$ bestimmten Hauptinvolution sein[194_2]. Diese Hauptinvolution ist also dem Polarfelde k^2 und mithin auch $k_2{}^2$ adjungiert. Sie ist aber auch dem Polarfelde $k_1{}^2$, weil dieses dem Büschel $(g\,h)$ angehört, adjungiert[194_2]. Den drei Polarfeldern ist also die Hauptinvolution von $C\Gamma = a$ adjungiert und die Involution g^2 konjugiert; es geht daher[219_2] der Träger der konjugierten Involution b^2, die $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ auſser g^2 gemeinsam haben, durch Γ:

Haben drei Polarfelder die konjugierte Punktinvolution g^2 *gemeinsam, so gehen die Träger der drei konjugierten Punktinvolutionen, welche je zwei von ihnen auſser* g^2 *gemeinsam haben, durch einen Punkt.*

Haben drei Polarfelder die konjugierte Strahleninvolution G^2 *gemeinsam, so liegen die Mittelpunkte der drei konjugierten Strahleninvolutionen, welche je zwei von ihnen auſser* G^2 *gemeinsam haben, in einer Gerade.*

Anmerkung. Haben die sämtlichen vier konjugierten A
Involutionen Ordnungspunkte, so heifst der Satz:

Von drei Kurven, die durch zwei Punkte K und K_1 gehen, schneiden sich je zwei aufser in K und K_1 noch in zwei Punkten; die Verbindungslinien dieser drei Punktpaare gehen durch *einen* Punkt. —

Von drei Kurven, die zwei Tangenten k und k_1 gemeinsam haben, haben je zwei aufser k und k_1 noch zwei Tangenten gemeinsam; die Schnittpunkte dieser drei Tangentenpaare liegen in *einer* Gerade. —

Je zwei Kreise haben eine konjugierte Involution gemeinsam, nämlich die zirkulare Involution der unendlich fernen Gerade[(131$_3$)]; wir können also unsern Satz auf drei beliebige Kreise anwenden. Dadurch erhalten wir den aus der Planimetrie bekannten Satz, dafs die Chordalen dreier Kreise durch *einen* Punkt gehen.

---

§ 20. Zwei Polarfelder.

222. Die durch zwei konjugierte Punktinvolutionen und einen Ordnungsstrahl bestimmten Polarfelder. 222

Aufgabe: *Eine Kurve zu zeichnen, von der zwei konjugierte Punktinvolutionen* g^2 *und* h^2 *und eine Tangente* a *gegeben sind.*

Aufgabe: *Eine Kurve zu zeichnen, von der zwei konjugierte Strahleninvolutionen* G^2 *und* H^2 *und ein Punkt* A *gegeben sind.*

Analysis: Weil für die Kurve die beiden konjugierten Involutionen g^2 und h^2 gegeben sind, so gehört sie dem durch $(g\,h)$ bestimmten Büschel von Polarfeldern an. Dieser bestimmt in der Gerade a eine Hauptinvolution und alle Kurven, die die Gerade a schneiden, schneiden sie in homologen Punkten der Hauptinvolution[(194$_3$ oder 204)]. Da die gesuchte Kurve die Gerade a berühren soll, so mufs die Hauptinvolution von a, wenn die Aufgabe lösbar sein soll, Ordnungspunkte haben. Sind diese E und E_1, so genügt jede der beiden Kurven des Büschels, welche durch E oder E_1 geht, den Bedingungen der Aufgabe. — Die Aufgabe hat keine oder zwei Lösungen.

Konstruktion: Wird die gegebene Tangente a von den Trägern der gegebenen Involutionen g^2 und h^2 und von der diesen zugeordneten Diagonale u in $C\Gamma A$ (Fig. 137) und von der Verbindungslinie der homologen Punkte C_1 und Γ_1 in A geschnitten, so ist $C\Gamma . A\,\mathrm{A}$ die Hauptinvolution von a[135$_3$]. Vermittelst der (in der Figur nur zur Hälfte gezeichneten) Hülfskreise bestimmen wir[139$_5$] die Ordnungspunkte E und E_1 dieser Hauptinvolution. Da E der Pol von a ist[87 Z$_2$], so ist C_1E die Polare von C und schneidet die Diagonale u[192$_2$] in dem Pole G_1 von g. Wir erhalten daher[98$_3$] die Kurve, wenn wir die Involution g^2 aus E und dem Punkte L projizieren, der von E durch G_1 und C_1 harmonisch getrennt

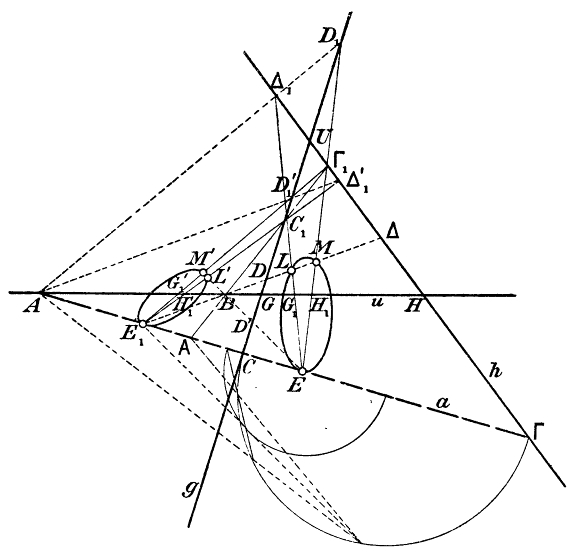

Fig. 137.

ist. — Für die Ausführung der Konstruktion ist eine Benutzung der Figur 126 in Nr. 202 zu empfehlen; aus ihr ergiebt sich, nachdem E und E_1 gefunden sind, eine hinreichend grofse Zahl von Bestimmungsstücken, um den Lauf der Kurve zu erkennen (vgl. Fig. 137).

A *Anmerkung.* Für den Fall, dafs g^2 und h^2 Ordnungspunkte haben, läfst sich die Aufgabe auch so fassen:

Durch vier Punkte eine Kurve zu legen, die eine gegebene Gerade berührt.	Durch einen Punkt eine Kurve zu legen, die vier gegebene Geraden berührt.

*Zusatz.** z

1. Aufgabe: *Einen Kreis zu zeichnen, von dem eine konjugierte Punktinvolution* h^2 *und eine Tangente* a *gegeben ist.*

Diese Aufgabe ist mit der eben gelösten identisch, da für den Kreis als weiteres Bestimmungsstück die zirkulare Involution der uneigentlichen Gerade (die wir durch g^2 bezeichnen wollen) hinzukommt(131₃). Die Diagonale u ist jetzt (vgl. 132_1) das im Fluchtpunkt(138) H auf h errichtete Lot (Fig. 138). Bezeichnen wir wieder die Punkte, in denen die gegebene Tangente a von $g\,h\,u$ geschnitten wird, durch $C\,\Gamma\,A$, so ist die Verbindungslinie der homologen Punkte C_1 und Γ_1 das von Γ_1 auf a gefällte Lot(112₄). Nennen wir seinen Fufspunkt A, so ist von der Hauptinvolution $C\Gamma\,.\,A\mathrm{A}$ der Punkt Γ der Fluchtpunkt, weil er dem uneigentlichen Punkte C homolog ist. Wir können

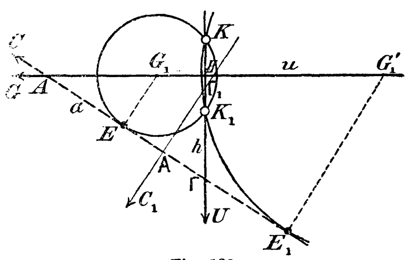

Fig. 138.

daher die Ordnungspunkte E und E_1 auch nach Nr. 138 finden, indem wir die mittlere Proportionale zu $\Gamma\mathrm{A}$ und ΓA zeichnen. Die Gerade, welche E mit C_1 verbindet, d. h. das in E auf der Tangente a errichtete Lot, schneidet dann die Diagonale u im Pole G_1 von g, d. h. im Mittelpunkte(114₂) des gesuchten Kreises; der um G_1 mit dem Radius $G_1 E$ geschlagene Kreis ist also der verlangte.

2. Da $A\,\mathrm{A}\,\Gamma_1\,H$ (Fig. 138) die Ecken eines Kreisvierecks sind, so ist nach einem planimetrischen Satze $\Gamma\mathrm{A}\,.\,\Gamma A = \Gamma H\,.\,\Gamma\Gamma_1$. Hat nun die gegebene Involution h^2 die Ordnungspunkte K und K_1, so dafs $HK = -HK_1$ und $HK^2 = H\Gamma\,.\,H\Gamma_1$ ist(139₃), so haben wir unter Berücksichtigung des Vorzeichens(41):

$$\begin{aligned}\Gamma\mathrm{A}\,.\,\Gamma A &= \Gamma H\,.\,\Gamma\Gamma_1 = \Gamma H(\Gamma H + H\Gamma_1) = \Gamma H^2 + \Gamma H\,.\,H\Gamma_1\\ &= \Gamma H^2 - HK^2 = (\Gamma H + HK)\,(\Gamma H - HK)\\ &= \Gamma K\,.\,(\Gamma H + HK_1) = \Gamma K\,.\,\Gamma K_1.\end{aligned}$$

Unsere Konstruktion führt also für den besondern Fall, dafs die Involution h^2 die Ordnungspunkte K und K_1 hat, auf die aus der Planimetrie bekannte Lösung der Aufgabe:

Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte K und K_1 geht und eine gegebene Gerade a berührt.

223 223. **Die durch eine konjugierte Punktinvolution, eine konjugierte Strahleninvolution und einen Ordnungspunkt bestimmten Polarfelder.**

Aufgabe: *Eine Kurve zu zeichnen, von der ein Punkt* L, *eine konjugierte Punktinvolution* g^2 *und eine konjugierte Strahleninvolution* $\mathfrak{G}^2$ *gegeben ist.*

Aufgabe: *Eine Kurve zu zeichnen, von der eine Tangente* l, *eine konjugierte Strahleninvolution* G^2 *und eine konjugierte Punktinvolution* $\mathfrak{g}^2$ *gegeben ist.*

Ist für die gesuchte Kurve G_1 (Fig. 139) der Pol des Trägers g und $\mathfrak{g}$ die Polare des Mittelpunktes $\mathfrak{G}$ der gegebenen Strahleninvolution, so ist der Schnittpunkt U von g und $\mathfrak{g}$ der Pol von $G_1\mathfrak{G}$. Die Polare von U, also $\mathfrak{G}\,G_1$, muſs aber durch den dem Punkte U in g^2 homologen Punkt G gehen, und weil der Pol von $\mathfrak{G}\,(U) = u_1$ in der Polare von U liegt, so muſs dem Strahle u_1 der Strahl $\mathfrak{G}\,(G) = u$ in $\mathfrak{G}^2$ homolog sein. Daraus ergiebt sich, daſs wir in g^2 ein Paar homologe Punkte $U\,G$ so zu bestimmen haben, daſs $\mathfrak{G}\,(U)$ und $\mathfrak{G}\,(G)$ gleichzeitig ein Paar homologe Strahlen $u\,u_1$ von $\mathfrak{G}^2$ bilden. Wir haben daher die Punktinvolution, welche die Strahleninvolution $\mathfrak{G}^2$ in dem Träger g ausschneidet, mit der in g gegebenen konjugierten Punktinvolution g^2 zu einer resultierenden zusammenzusetzen; die Ordnungspunkte U und G dieser resultierenden erfüllen die verlangte Bedingung(161₁). Hat die resultierende keine Ordnungspunkte, so hat die Aufgabe keine Lösung.

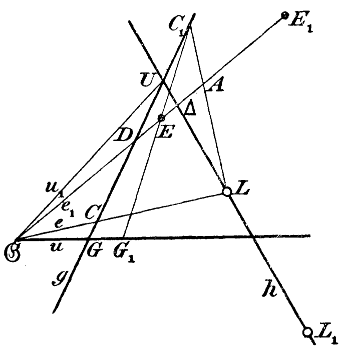

Fig. 139.

Nehmen wir an, U und G seien zwei Punkte der verlangten Art, so daſs gleichzeitig U und G zwei homologe Punkte von g^2 und $\mathfrak{G}\,(G) = u$ und $\mathfrak{G}\,(U) = u_1$ zwei homologe Strahlen von $\mathfrak{G}^2$ sind; dann muſs für die verlangte Kurve u die Polare von U *oder* u_1 die Polare von G sein.

Wir verfolgen den ersten Fall. Für die Kurve, für welche $\mathfrak{G}(G) = u$ (Fig. 139) die Polare von U ist, mufs der von dem gegebenen Punkte L durch U und u harmonisch getrennte Punkt L_1 ein zweiter Punkt sein. Unsere Kurve gehört daher dem Büschel an, welches bestimmt ist durch die Involution g^2 und die durch die Ordnungspunkte L und L_1 in $L\,U = h$ bestimmte Involution h^2.

Für sämtliche Polarfelder dieses Büschels liegen die Pole irgend eines Strahles e von $\mathfrak{G}$ in einer Polkurve $e_1^{\,2}$(195). Schneidet diese den homologen Strahl e_1 von $\mathfrak{G}^2$ in E und E_1, so sind für die beiden Kurven des Büschels, für welche E oder E_1 der Pol von e ist, die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Als Strahl e von $\mathfrak{G}$ wählen wir die Verbindungslinie $\mathfrak{G}\,L$, welche g in C schneiden möge. Ist dann C_1 der dem Punkte C in g^2 homologe Punkt, so liegen die Pole der Gerade $e = C\,L$ in einer Polkurve, die bestimmt ist(195 Z_1) durch die drei Punkte $C_1\,L\,U$ und den Schnittpunkt $\mathfrak{G}$ der Tangenten in C_1 und L. Schneidet der dem Strahle e in $\mathfrak{G}^2$ homologe Strahl e_1 die Träger g und h und die Polare $C_1\,L$(86 Z_1) von $\mathfrak{G}$ in $D\,\Delta\,A$, so ist die durch die Polkurve $e_1^{\,2}$ in e_1 bestimmte Involution $\mathfrak{G}\,A\,.\,D\,\Delta$(99$_1$). In unserer Figur hat die Involution die Ordnungspunkte E und E_1. Wir haben also noch die Kurve zu zeichnen, für welche E (oder E_1) der Pol von e ist; für diese ist die Polare von C die Verbindungslinie $C_1\,E$. Schneidet diese die Gerade u in G_1, so ist die durch die Zuweisung $(G\,G_1)$ bestimmte Kurve des Büschels $(g\,h)$ die verlangte. — Die Aufgabe hat entweder keine, zwei oder vier Lösungen.

Anmerkung. Für den Fall, dafs g^2 Ordnungspunkte und $\mathfrak{G}^2$ Ordnungsstrahlen hat, läfst sich die Aufgabe auch so fassen: A

1. Durch drei Punkte eine Kurve zu legen, die zwei gegebene Geraden berührt. —	1. Durch zwei Punkte eine Kurve zu legen, die drei gegebene Geraden berührt. —

Für den besondern Fall, dafs die gegebene Strahleninvolution zirkular(112) ist, kann man die Aufgabe auch so fassen(142$_3$):

2. Eine Kurve zu zeichnen, für die ein Punkt, eine	2. Eine Kurve zu zeichnen, für die eine Tangente, eine

konjugierte Punktinvolution und ein Brennpunkt gegeben ist.

konjugierte Punktinvolution und ein Brennpunkt gegeben ist.

z *Zusatz.**

1. Aufgabe: *Einen Kreis zu zeichnen, von dem eine konjugierte Strahleninvolution* $\mathfrak{G}^2$ *und ein Punkt* L *gegeben ist.*

Bezeichnen wir wieder[(222 Z)] die zirkulare Involution der uneigentlichen Gerade durch g^2, so sind, wie wir bei der allgemeinen Lösung gesehen haben, zunächst die beiden homologen Strahlen von $\mathfrak{G}^2$ zu bestimmen, die die uneigentliche Gerade in zwei homologen Punkten der zirkularen Involution schneiden, mit andern Worten: Es sind die beiden

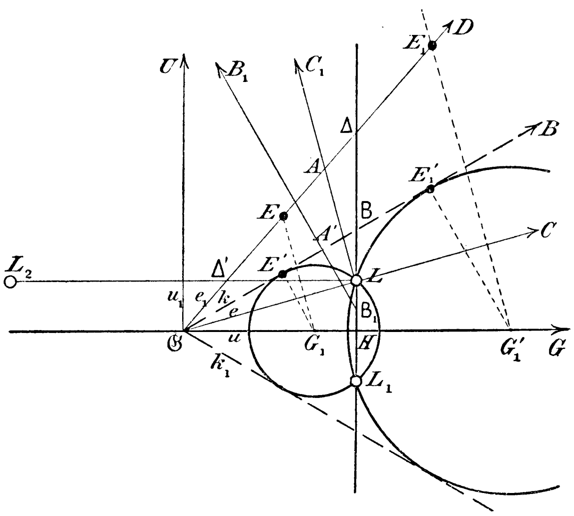

Fig. 140.

homologen Strahlen von $\mathfrak{G}^2$ zu bestimmen, die aufeinander senkrecht stehen. Diese beiden Strahlen, die immer vorhanden sind[(113)], bezeichnen wir durch u und u_1 (Fig. 140) und ihre uneigentlichen Punkte durch G und U. Da für den gesuchten Kreis u die Polare von U oder u_1 die Polare von G sein muſs, so haben wir für den ersten Fall den von L durch U und u harmonisch getrennten Punkt L_1, für den zweiten den von L durch G und u_1 harmonisch getrennten Punkt L_2 zu zeichnen, d. i., nach planimetrischem Sprachgebrauch, die Gegenpunkte von L in Bezug auf u und u_1. Wir verfolgen zunächst den ersten Fall. Schneidet die Gerade $\mathfrak{G}\,L = e$ die uneigentliche Gerade in C, so geht das in L auf e errichtete Lot durch C_1, und die der Gerade e zugeordnete Polkurve $e_1{}^2$ ist bestimmt durch die uneigentlichen Punkte C_1 und U, den eigentlichen Punkt L und den Schnittpunkt $\mathfrak{G}$ der Tangenten in L und C_1. Schneidet nun der dem Strahle e in $\mathfrak{G}^2$ homologe Strahl e_1 die Seiten des Kurvendreiecks $L\,C_1\,U$ in $A\,D\,\mathsf{\Delta}$, so ist $\mathfrak{G}\,A\,.\,D\,\mathsf{\Delta}$ die von $e_1{}^2$ in e_1 bestimmte konjugierte Involution. Es ergiebt sich für den zweiten Fall, wenn wir noch den Schnittpunkt von $L\,L_2$ und e_1 durch $\mathsf{\Delta}'$ bezeichnen, dafs die Polkurve $e_1{}'^2$ in e_1 die konjugierte Involution $\mathfrak{G}\,A\,.\,D\,\mathsf{\Delta}'$ bestimmt. Da nun $\mathfrak{G}\,A\,.\,\mathsf{\Delta}\,\mathsf{\Delta}'$ ein elliptischer Wurf(112₃) und D der uneigentliche Punkt ist, so ist einer von den beiden Würfen $\mathfrak{G}\,A\,.\,D\,\mathsf{\Delta}$ und $\mathfrak{G}\,A\,.\,D\,\mathsf{\Delta}'$ elliptisch, der andere hyperbolisch; unsere Aufgabe hat also stets zwei Lösungen. Ist, wie in unserer Figur, $\mathfrak{G}\,A\,.\,D\,\mathsf{\Delta}$ der hyperbolische Wurf, so lassen sich die Ordnungspunkte E und E_1 finden, indem wir die mittlere Proportionale zu $\mathsf{\Delta}\,A$ und $\mathsf{\Delta}\,\mathfrak{G}$ zeichnen. Das von E (oder E_1) auf e gefällte Lot trifft dann, weil es die Polare des (uneigentlichen) Punktes C ist, u in dem Mittelpunkte G_1 (oder $G_1{}'$) des gesuchten Kreises. —

2. Hat die Strahleninvolution $\mathfrak{G}^2$ die Ordnungsstrahlen k und k_1 (Fig. 140), so sind die homologen Strahlen u und u_1, welche aufeinander senkrecht stehen, die Halbierungslinien der von k und k_1 gebildeten Winkel(113 Z₁). Wählt man in diesem Falle zur Bestimmung des Punktes E nicht den Strahl $\mathfrak{G}\,(L) = e$ und seinen homologen e_1, sondern einen Ordnungsstrahl z. B. k, welcher $L\,L_1$ und die uneigentliche Gerade in B und B schneiden möge, so hat man von dem Punkte B_1, der von B durch L und L_1 harmonisch getrennt ist, auf k das Lot $\mathsf{B}_1\,A'$ zu fällen, um die der Polkurve konjugierte(195) Hauptinvolution(134) $\mathfrak{G}\,A'\,.\,B\,\mathsf{B}$ zu erhalten. Um die Ordnungspunkte dieser Involution zu finden, hat man, weil B der Fluchtpunkt ist, die mittlere Proportionale von $\mathsf{B}\,\mathfrak{G}$ und $\mathsf{B}\,A'$ zu zeichnen. Auf dieselbe Weise wie in Nr. 222 Z₂ läfst sich zeigen, dafs diese identisch ist mit der mittleren Proportionale von $\mathsf{B}\,L$ und $\mathsf{B}\,L_1$, so dafs wir auch hier zu der aus der Planimetrie bekannten Lösung der

Aufgabe gelangen: Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Geraden berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

224 224. **Die zwei Polarfeldern gemeinsam adjungierten Involutionen.** Sind uns zwei Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ gegeben, so können wir zu jedem Punkte A die Polare a_1 für $k_1{}^2$ und die Polare a_2 für $k_2{}^2$ zeichnen. Der Schnittpunkt A_1 von a_1 und a_2 ist dem Punkte A für beide Polarfelder konjugiert$^{(184_1)}$. Bewegt sich der Punkt A in einer Gerade e, so beschreibt a_1 einen geraden Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt E_1 der Pol von e für $k_1{}^2$ ist, und a_2 einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt E_2 der Pol von e für $k_2{}^2$ ist. Da diese beiden Strahlenbüschel projektiv auf $A^{(183_5)}$ und daher auch projektiv aufeinander bezogen sind, so liegen die Schnittpunkte A_1 der homologen Strahlen a_1 und a_2 in einer der Gerade e zugeordneten Kurve $e_1{}^2$. Schneiden die Polaren a_1 und a_2 (Fig. 141) die Gerade e in B und C, so dafs A und B zwei für $k_1{}^2$ konjugierte Punkte von e sind, so geht die Polare c_2 von C für $k_2{}^2$, weil C der Schnittpunkt von e und a_2 ist, durch E_2 und A. Die Polare c_1 von C geht durch E_1 und schneidet $e_1{}^2$ in dem dem Punkte C für beide Kurven konjugierten Punkte C_1 und die Gerade e in dem dem Punkte C für $k_1{}^2$ konjugierten Punkte D. Die dem Polarfelde $k_1{}^2$ konjugierte Involution von e ist daher $AB\,.\,CD$; da AB und CD die Punktpaare sind, in denen zwei Paar Gegenseiten des Vierecks $E_1 E_2 A_1 C_1$ der Kurve $e_1{}^2$ die Gerade e schneiden, so ist die Involution $AB\,.\,CD$ der Kurve $e_1{}^2$ adjungiert$^{(169_2)}$. In derselben Weise läfst sich zeigen, dafs die Involution von e, welche dem Polarfelde $k_2{}^2$ konjugiert ist, der Kurve $e_1{}^2$ adjungiert ist. Die der Kurve $e_1{}^2$ konjugierte Involution von e ist daher die resultierende$^{(214_3)}$ aus den beiden in e liegenden Involutionen, welche den Polarfeldern $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ konjugiert sind. Wir fassen das Vorstehende zusammen in dem

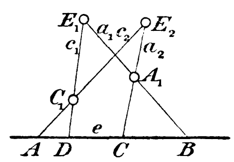

Fig. 141.

Lehrsatz: *Zwei Polarfelder* $k_1{}^2$ *und* $k_2{}^2$ *bestimmen in jeder Gerade* e *eine gemeinsam ad-*

Lehrsatz: *Zwei Polarfelder* $k_1{}^2$ *und* $k_2{}^2$ *bestimmen in jedem Punkte* E *eine gemeinsam* *jungierte Involution. Diese ist konjugiert der der Gerade* e *zugeordneten Kurve* $e_1{}^2$, *welche die den Punkten* A *von* e *für beide Polarfelder gemeinsam konjugierten Punkte* A_1 *enthält.*

adjungierte Involution. Diese ist konjugiert dem dem Punkte E *zugeordneten krummen Strahlenbüschel* $E_1{}^2$, *welcher die den Strahlen* a *von* E *für beide Polarfelder gemeinsam konjugierten Geraden* a_1 *enthält.*

225. **Hauptpunkte.** Ist f eine zweite beliebige Gerade und $f_1{}^2$ die ihr zugeordnete Kurve, welche die den Punkten von f für beide Polarfelder gleichzeitig konjugierten Punkte enthält, so müssen die beiden Kurven $e_1{}^2$ und $f_1{}^2$ durch den Punkt M_1 gehen, der dem Schnittpunkte M von e und f für beide Polarfelder konjugiert ist. Daher schneiden sich $e_1{}^2$ und $f_1{}^2$ noch in einem zweiten Punkte U(111). Da U sowohl in $e_1{}^2$ als in $f_1{}^2$ liegt, so mufs es sowohl in e als in f einen von M verschiedenen Punkt geben, der dem Punkte U für beide Polarfelder konjugiert ist. Die Verbindungslinie u dieser beiden Punkte S und S_1 ist daher die Polare des Punktes U sowohl für $k_1{}^2$ wie für $k_2{}^2$(184₃); mit andern Worten: die Polaren des Punktes U für $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ fallen in u zusammen. Einen solchen Punkt U, dessen Polaren für beide Polarfelder zusammenfallen, nennen wir einen *Hauptpunkt* der beiden Felder. — Weil die durch die Ordnungspunkte M_1 und U in der Verbindungslinie $M_1 U$ bestimmte Involution beiden Kurven $e_1{}^2$ und $f_1{}^2$ konjugiert ist, so haben diese noch eine konjugierte Involution gemeinsam(191₁). Hat diese die Ordnungspunkte V und W, so gilt für sie, da sie ebenfalls Schnittpunkte von $e_1{}^2$ und $f_1{}^2$ sind, dasselbe wie für U. 225

Lehrsatz: Zwei Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ bestimmen mindestens einen und höchstens drei (Haupt-)Punkte, deren Polaren zusammenfallen.

Lehrsatz: Zwei Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ bestimmen mindestens einen und höchstens drei (Haupt-)Strahlen, deren Pole zusammenfallen.

226. **Hauptgeraden.** Die den Geraden e und f zugeordneten Kurven $e_1{}^2$ und $f_1{}^2$ haben, wie wir eben schon sahen, aufser den Schnittpunkten M_1 und U noch eine gemeinsam konjugierte Punktinvolution. Es läfst sich zeigen, dafs der Träger dieser gemeinsam konjugierten Involution die Gerade u ist, in welcher die Polaren des Punktes U zu- 226

sammenfallen. — Die Polaren des Punktes S (Fig. 142), in dem e von u geschnitten wird, gehen beide durch U; S ist daher dem Punkte U für k_1^2 und k_2^2 konjugiert; ebenso ist dem Schnittpunkte M von e und f für beide Felder der Punkt M_1 konjugiert; wir können daher(96) noch zwei Punkte finden, die einander für beide Felder konjugiert sind: Der Schnittpunkt X von $e = MS$ und $M_1 U$ ist dem Schnittpunkte X_1 von MU und $M_1 S$ konjugiert. Die Polare des Punktes X für k_1^2 ist daher die Gerade, welche den Pol E_1 von e für k_1^2 mit X_1 verbindet. Schneidet diese Polare die Gerade u in Y, so ist die Polare von Y die Verbindungslinie XU, welche u in dem dem Punkte Y für k_1^2 konjugierten Punkte Z schneidet. Ferner ist für k_1^2 die Polare des Punktes S, des Schnittpunktes von e und u, die Verbindungslinie $E_1 U$, die u in dem dem Punkte S für k_1^2 konjugierten Punkte T schneidet. Die durch k_1^2 in u induzierte konjugierte Involution ist also $ST.YZ$. Dies sind aber die Punkte, in denen zwei Paar Gegenseiten des Vierecks $UM_1X_1E_1$ der Kurve e_1^2 die Gerade u schneiden. Die dem Polarfelde k_1^2 in u konjugierte Involution ist also(169₂) der Kurve e_1^2 adjungiert. In derselben Weise läſst sich zeigen, daſs auch die dem Polarfelde k_2^2 in der Hauptgerade u konjugierte Involution der Kurve e_1^2 adjungiert ist. Die der Kurve e_1^2 in u konjugierte Involution ist daher(214₃) die resultierende aus den beiden Involutionen, welche den Polarfeldern k_1^2 und k_2^2 in u konjugiert sind. Da diese resultierende Involution von der Wahl der Gerade e unabhängig ist, so ist sie dieselbe für alle Kurven e_1^2:

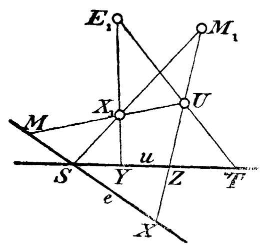

Fig. 142.

1. Die gemeinsam adjungierte Punktinvolution, welche die beiden Polarfelder k_1^2 und k_2^2 in der Hauptgerade u bestimmen(224), ist jeder Kurve e_1^2 konjugiert, welche die den Punkten A einer beliebigen Gerade e für beide Polarfelder gemeinsam kon-

1. Die gemeinsam adjungierte Strahleninvolution, welche die beiden Polarfelder k_1^2 und k_2^2 in dem Hauptpunkte U bestimmen, ist jedem krummen Strahlenbüschel E_1^2 konjugiert, welcher die den Strahlen a eines beliebigen Punktes E für

jugierten Punkte A_1 enthält. —

beide Polarfelder gemeinsam konjugierten Strahlen a_1 enthält. —

Da jede Gerade e die Hauptgerade u schneidet und die Polaren dieses Schnittpunktes für $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ beide durch den Pol U von u gehen, so schneiden sich sämtliche Kurven $e_1{}^2$ in U. Hieraus ergiebt sich in Verbindung mit Nr. 224:

2. *Die Punkte* A_1, *welche den Punkten* A *einer beliebigen Gerade* e *für zwei Polarfelder* $\mathrm{k}_1{}^2$ *und* $\mathrm{k}_2{}^2$ *gemeinsam konjugiert sind, liegen in einer Kurve* $\mathrm{e}_1{}^2$, *die bestimmt ist durch den Hauptpunkt* U *und diejenigen Involutionen der Gerade* e *und der Hauptgerade* u, *welche den beiden Polarfeldern* $\mathrm{k}_1{}^2$ *und* $\mathrm{k}_2{}^2$ *gemeinsam adjungiert sind.*

2. *Die Geraden* a_1, *welche den Strahlen* a *eines beliebigen Punktes* E *für zwei Polarfelder* $\mathrm{k}_1{}^2$ *und* $\mathrm{k}_2{}^2$ *gemeinsam konjugiert sind, bilden einen krummen Strahlenbüschel* $\mathrm{E}_1{}^2$, *der bestimmt ist durch die Gerade* u *und diejenigen Involutionen des Punktes* E *und des Hauptpunktes* U, *welche den beiden Polarfeldern* $\mathrm{k}_1{}^2$ *und* $\mathrm{k}_2{}^2$ *gemeinsam adjungiert sind.*

Zusatz. Hat die den beiden Polarfeldern $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ gemeinsam adjungierte Involution der Hauptgerade u die Ordnungspunkte V und W, so gehen nach dem eben bewiesenen Satze sämtliche Kurven $e_1{}^2$ durch V und W; gleichzeitig sind V und W einander sowohl für $k_1{}^2$ wie für $k_2{}^2$ konjugiert[161_1]. Die Polaren von V und W für beide Polarfelder fallen daher ebenfalls zusammen und zwar in $v = UW$ und $w = UV$. z

Bestimmen zwei Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ drei Hauptpunkte, so sind diese die Ecken eines beiden Polarfeldern gemeinsamen Poldreiecks[184_3].

Bestimmen zwei Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ drei Hauptgeraden, so sind diese die Seiten eines beiden Polarfeldern gemeinsamen Poldreiecks.

227. **Die komponierenden Strahleninvolutionen der Hauptpunkte.** Projiziert man aus dem Hauptpunkte U die den beiden Polarfeldern $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ gemeinsam adjungierten Involutionen von e und u, so erhält man in U zwei Strahleninvolutionen, die sich zu einer resultierenden zusammensetzen. Diese resultierende Strahleninvolution von U schneidet, weil die adjungierten Involutionen von e und u der Kurve $e_1{}^2$ konjugiert sind[226_2], die Kurve $e_1{}^2$ in Punktpaaren einer 227

krummen Involution, deren Zentrum der Schnittpunkt S (Fig. 142) von e und u ist[168]. Von dieser krummen Involution haben wir in Nr. 226 das Punktpaar $M_1 X_1$ gezeichnet; die resultierende Involution von U kann also als bestimmt[166₁] angesehen werden durch die homologen Strahlen $U(X_1)M$ und UM_1 und durch die Bedingung, daſs sie eine komponierende ist der Involution, durch welche die adjungierte Involution der Hauptgerade u aus U projiziert wird. Ist nun f eine zweite Gerade, die e in M schneidet, so ergiebt sich durch eine Wiederholung der eben angestellten Betrachtungen, daſs die Strahleninvolutionen, durch welche die adjungierten Involutionen von u und f aus U projiziert werden, sich zu einer resultierenden zusammensetzen, von der UM und UM_1 ebenfalls zwei homologe Strahlen sind und die die Hauptgerade u in einer komponierenden der in ihr liegenden adjungierten Involution schneidet.

Die adjungierten Involutionen von f und u erzeugen also in U dieselbe[166₁] resultierende Involution wie die adjungierten Involutionen von e und u; mit andern Worten: Die drei adjungierten Involutionen von $u\,e\,f$ werden aus dem Hauptpunkte U durch komponierende Strahleninvolutionen projiziert. Da f als beliebige Gerade eingeführt wurde[225], so ist damit bewiesen, daſs die den Polarfeldern $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ gemeinsam adjungierten Involutionen sämtlicher Geraden aus dem Hauptpunkte U durch komponierende Strahleninvolutionen projiziert werden. Für den Fall, daſs die adjungierte Involution der Hauptgerade u die Ordnungspunkte V und W hat, läſst sich an die Stelle von U jeder der Hauptpunkte V und W setzen. Wir haben daher den

Lehrsatz: Die sämtlichen Punktinvolutionen, welche zwei Polarfeldern $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ gemeinsam adjungiert sind, werden aus jedem Hauptpunkte durch komponierende Strahleninvolutionen projiziert.

Lehrsatz: Die sämtlichen Strahleninvolutionen, welche zwei Polarfeldern $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ gemeinsam adjungiert sind, werden durch jede Hauptgerade in komponierenden Punktinvolutionen geschnitten.

228 228. **Die Ordnungsstrahlen eines Hauptpunktes.** Die komponierenden Strahleninvolutionen, durch welche die beiden Feldern gemeinsam adjungierten Involutionen aus

dem Hauptpunkte U projiziert werden[227], setzen sich zu einer resultierenden zusammen, die wir die *Hauptinvolution* von U nennen wollen. Nun sind die Ordnungspunkte der adjungierten Involutionen einander für $k_1{}^2$ sowohl wie für $k_2{}^2$ konjugiert[214₂], und da sie aus U durch zwei homologe Strahlen der Hauptinvolution projiziert werden, so liegen die Punkte A_1, die den Punkten A eines Strahles a von U gleichzeitig für $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ konjugiert sind, in einem homologen Strahle a_1 der Hauptinvolution von U. Hat also die Hauptinvolution von U zwei Ordnungsstrahlen g und h, so sind den Punkten A von g (oder h) die Punkte A_1 von g (oder h) für beide Felder konjugiert, d. h. jede der Geraden g und h ist Träger einer den beiden Feldern gemeinsam konjugierten Involution. Die resultierende Hauptinvolution liefs sich[227] als bestimmt ansehen durch das Strahlenpaar $U(M\,M_1)$ und durch die Bedingung, dafs die durch die adjungierte Involution von u in U induzierte Strahleninvolution eine komponierende von ihr war. Ist nun diese komponierende elliptisch, so hat die Hauptinvolution von U zwei Ordnungsstrahlen g und h[161₃]. Hat aber die komponierende Involution Ordnungsstrahlen, die adjungierte Involution von u also die Ordnungspunkte V und W, so hat die Hauptinvolution von U nicht immer Ordnungsstrahlen. In diesem Falle sind $U(V)$ und $U(W)$ zwei homologe Strahlen der Hauptinvolution von U[161₁], so dafs sie bestimmt ist durch $U(V\,W\,.\,M\,M_1)$. Da von den Punkten V und W dasselbe gilt wie von U[226 Z], so ist die Hauptinvolution von V bestimmt durch $V(W\,U\,.\,M\,M_1)$, die von W durch $W(U\,V\,.\,M\,M_1)$. Von den drei Involutionen $U(V\,W\,.\,M\,M_1)$, $V(W\,U\,.\,M\,M_1)$, $W(U\,V\,.\,M\,M_1)$, welche die Punkte M und M_1 in den Ecken des Dreiseits $u\,v\,w$ bestimmen, hat aber mindestens eine Ordnungsstrahlen[137₃].

1. Lehrsatz: *Zwei Polarfelder haben stets zwei konjugierte Punktinvolutionen gemeinsam.*

1. Lehrsatz: *Zwei Polarfelder haben stets zwei konjugierte Strahleninvolutionen gemeinsam.*

Sehen wir die beiden konjugierten Punktinvolutionen, die die Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ gemeinsam haben, als Gegenseiten an, so können wir, weil zwei Gegenseiten einen Büschel von Polarfeldern bestimmen[192₁], unsern Satz auch so aussprechen:

2. Durch zwei Polarfelder ist ein Büschel von Polarfeldern bestimmt.

2. Durch zwei Polarfelder ist eine Schar von Polarfeldern bestimmt.

z *Zusatz.* Sind drei Hauptpunkte $U\,V\,W$ vorhanden und hat jede Hauptinvolution dieser drei Punkte Ordnungsstrahlen, so bilden diese sechs Ordnungsstrahlen die Gegenseiten eines Vierecks[(137₃)]. Da, wie wir eben sahen, jeder Ordnungsstrahl eines Hauptpunktes der Träger einer beiden Feldern gemeinsam konjugierten Involution ist, so mufs der Schnittpunkt z. B. eines Ordnungsstrahles von U und eines Ordnungsstrahles von V ein sich selbst konjugierter Punkt sein; die Ecken des Vierecks sind also Ordnungspunkte der in den Seiten liegenden Involutionen. Die Ordnungskurven der Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ haben daher in diesem Falle vier Punkte gemeinsam.

229 229. **Die zwei Polarfeldern gemeinsamen Strahleninvolutionen.** Dafs zwei Polarfelder stets zwei konjugierte Strahleninvolutionen gemeinsam haben, soll, obgleich es[(228₁)] bereits ausgesprochen ist, noch einmal durch eine Fortsetzung der bisherigen Betrachtungen gezeigt werden, damit der Zusammenhang zwischen den konjugierten Punkt- und Strahleninvolutionen hervortritt. — Die Polare eines beliebigen Punktes P für $k_1{}^2$ sei p_1, für $k_2{}^2$ p_2, der Schnittpunkt von p_1 und p_2 sei P_1. Zu jedem Strahle a von P gehört ein Punkt A_1 von p_1 als Pol für $k_1{}^2$ und ein Punkt A_2 von p_2 als Pol für $k_2{}^2$. Dreht sich a um P, so beschreiben A_1 und A_2 zwei zu a und daher zu einander projektive Punktreihen; die Verbindungslinie $A_1 A_2 = a_1$, die dem Strahle a für beide Polarfelder konjugierte Gerade, beschreibt daher einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung P^2. Zu diesem Strahlenbüschel gehört auch die Hauptgerade u; denn wenn a durch U geht, so fällt a_1 in u. Die Geraden a und a_1 erzeugen daher in u zwei projektive Punktreihen[(50)].

Die beiden Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$, welche[(228₂)] einen Büschel $(g\,h)$ bestimmen, seien in diesem Büschel durch die Zuweisungen $(G\,G_1)$ und $(G\,G_2)$ bestimmt[(192₃)]. Geht dann a durch G_1 und schneidet g und h in C und Γ, so ist der dem Punkte C in g^2 homologe Punkt C_1 der Pol von $a = P\,G_1$ für $k_1{}^2$. Der Pol für $k_2{}^2$ ist, wenn wir den dem Punkte Γ in h^2 homologen Punkt durch Γ_1 und den dem

Punkte G_2 in der diagonalen Involution homologen Punkt durch H_2 bezeichnen, der Schnittpunkt von $C_1 G_2$ und $\Gamma_1 H_2$[193_2]. Der dem Strahle $a = P\,G_1$ für beide Polarfelder gemeinsam konjugierte Strahl a_1 ist daher $C_1 G_2$. In derselben Weise ergiebt sich, dafs der dem Strahle $P\,G_2$ für beide Polarfelder gemeinsam konjugierte Strahl durch G_1 geht. Die von den Strahlen a und a_1 in u beschriebenen Punktreihen haben daher involutorische Lage[63_1]. Da von dieser in u erzeugten Involution auch die Punkte H_1 und H_2, die Pole von h für $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$, zwei zugeordnete Punkte sind, wie sich in derselben Weise ergeben würde, so ist die Involution bestimmt durch $G_1 G_2 . H_1 H_2$. Diese ist eine komponierende der diagonalen Involution $u^2 = G_1 H_1 . G_2 H_2$[167_1].

Liegt der Punkt P in der Hauptgerade u, so schneiden sich seine Polaren p_1 und p_2 in dem Hauptpunkte U und die beiden von A_1 und A_2 beschriebenen Punktreihen sind in perspektiver Lage, weil A_1 und A_2 gleichzeitig in U fallen, nämlich dann, wenn a in u fällt. Die konjugierte Gerade a_1 beschreibt daher einen Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt der dem Punkte P in der eben konstruierten Involution $G_1 G_2 . H_1 H_2$ homologe sein mufs. Hat daher die Involution $G_1 G_2 . H_1 H_2$ Ordnungspunkte, so ist jeder derselben Mittelpunkt einer den beiden Polarfeldern gemeinsam konjugierten Strahleninvolution. Weil die Involution $G_1 G_2 . H_1 H_2$ aber, wie wir eben sahen, eine komponierende der diagonalen Involution u^2 ist, so hat sie zwei Ordnungspunkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$[161_3], wenn u^2 keine hat. — Hat u^2 dagegen die Ordnungspunkte V und W, so braucht die Involution $G_1 G_2 . H_1 H_2$ keine zu haben[163]. Dann aber sind auch $v = W\,U$ und $w = U\,V$ ebenso wie u Strahlen jedes krummen Büschels P^2. Auf ihnen schneiden daher auch die konjugierten Geraden a und a_1 projektive Punktreihen aus, die in involutorischer Lage sind, weil die Punkte W und U, U und V einander zweifach entsprechen. Die Geraden a und a_1 bestimmen daher in den Seiten des Dreiecks $U\,V\,W$ Involutionen, deren Ordnungspunkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ die Mittelpunkte der gesuchten gemeinsam konjugierten Strahleninvolutionen sind. Von diesen drei in den Seiten liegenden Involutionen hat aber immer mindestens eine Ordnungspunkte[137_3]. Da die Ordnungspunkte der Involution $G_1 G_2 . H_1 H_2$ einander homolog sind[161_1] in der den beiden

Polarfeldern gemeinsam adjungierten Involution der Hauptgerade u, so haben wir den

Lehrsatz: Zwei beliebige Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ haben stets zwei konjugierte Punktinvolutionen g^2 und h^2 und zwei konjugierte Strahleninvolutionen $\mathfrak{G}^2$ und $\mathfrak{H}^2$ gemeinsam. Die Träger g und h der Punktinvolutionen sind die Ordnungsstrahlen der resultierenden Involution eines Hauptpunktes; die Mittelpunkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ der Strahleninvolutionen sind zwei homologe Punkte der den beiden Polarfeldern gemeinsam adjungierten Involution einer Hauptgerade.

Lehrsatz: Zwei beliebige Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ haben stets zwei konjugierte Strahleninvolutionen G^2 und H^2 und zwei konjugierte Punktinvolutionen $\mathfrak{g}^2$ und $\mathfrak{h}^2$ gemeinsam. Die Mittelpunkte G und H der Strahleninvolutionen sind die Ordnungspunkte der resultierenden Involution einer Hauptgerade; die Träger $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ der Punktinvolutionen sind zwei homologe Strahlen der den beiden Polarfeldern gemeinsam adjungierten Involution eines Hauptpunktes.

z *Zusatz*. Hat jede der drei in den Seiten liegenden Involutionen Ordnungspunkte, so bilden diese die Gegenecken eines Vierseits[137₃]. Da jeder Ordnungspunkt der Mittelpunkt einer beiden Feldern gemeinsam konjugierten Strahleninvolution ist, so mufs die Verbindungslinie zweier Ordnungspunkte eine sich selbst konjugierte Gerade sein. Die Ordnungskurven der Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ haben daher in diesem Falle vier gemeinsame Tangenten.

230 230. **Vier adjungierte Involutionen.** Die Polarfelder, welchen vier gegebene Involutionen $a^2\, b^2\, c^2\, d^2$ adjungiert sind, gehören, wie wir beweisen wollen, einem Büschel von Polarfeldern an. — Wählen wir in dem Träger a irgend eine komponierende der gegebenen Involution a^2, so bestimmt diese als konjugierte Involution zusammen mit den adjungierten Involutionen $b^2\, c^2\, d^2$ ein Polarfeld $k_1{}^2$[220₂], dem die Involutionen $a^2\, b^2\, c^2\, d^2$ adjungiert sind. Wählen wir eine komponierende der Involution b^2, so bestimmt diese als konjugierte Involution zusammen mit den adjungierten Involutionen $a^2\, c^2\, d^2$ ein Polarfeld $k_2{}^2$, dem ebenfalls die vier Involutionen $a^2\, b^2\, c^2\, d^2$ adjungiert sind. Diese beiden Polarfelder $k_1{}^2$ und $k_2{}^2$ bestimmen einen Büschel[228₂], dessen

sämtlichen Polarfeldern die Involutionen $a^2\, b^2\, c^2\, d^2$ adjungiert sind, weil sie zwei Polarfeldern ($k_1{}^2$ und $k_2{}^2$) des Büschels adjungiert sind.

1. Durch vier adjungierte Punktinvolutionen ist ein Büschel von Polarfeldern bestimmt.	1. Durch vier adjungierte Strahleninvolutionen ist eine Schar von Polarfeldern bestimmt.
2. *Durch fünf adjungierte Punktinvolutionen ist ein Polarfeld bestimmt*[216].	2. *Durch fünf adjungierte Strahleninvolutionen ist ein Polarfeld bestimmt.*

Anmerkung. Haben alle Involutionen Ordnungspunkte, A
so heifst z. B. der letzte Satz:

Durch fünf Paar konjugierte Punkte ist ein Polarfeld bestimmt.	Durch fünf Paar konjugierte Strahlen ist ein Polarfeld bestimmt.

231. **Inhalt des Buches.** Die Bestimmung eines Polar- 231
feldes durch fünf adjungierte Involutionen, die wir in der vorigen Nummer kennen lernten, ist die allgemeinste und bildet den Schlufs unserer Betrachtungen. Es bleibt nur noch übrig, die in diesem Buche gegebene Darstellung kurz zu kennzeichnen und ihre Abweichung von der üblichen zu begründen.

Wir begannen damit, vermittelst zweier Punkte P und Q die Punkte ihrer Verbindungslinie PQ einander zuzuordnen, indem wir zu jedem Punkte A den von ihm durch P und Q harmonisch getrennten Punkt A_1 konstruierten. Den Inbegriff der auf solche Weise erhaltenen Punktpaare AA_1 nannten wir eine Involution und die beiden Punkte P und Q, vermittelst deren wir die Punkte der Gerade PQ einander zugeordnet hatten, die Ordnungspunkte. Wir stellten uns dann die *umgekehrte* Aufgabe: Aus den Punktpaaren AA_1 die Ordnungspunkte P und Q zu finden. Wir sahen zunächst, dafs die Gesamtheit der Punktpaare AA_1 durch zwei unter ihnen, die wir durch BB_1 und CC_1 bezeichnen wollen, bestimmt ist, und ferner, dafs nicht immer zwei Punkte P und Q existieren, dafs ihre Existenz vielmehr an die Bedingung geknüpft ist, dafs der Wurf $BB_1 . CC_1$ ein hyperbolischer ist[164,1]. Eine solche Bedingung nun ist für den Fortgang der Untersuchungen äufserst lästig. Ein Beispiel aus der Arithmetik wird dies deutlicher machen.